# مذكرة الجبر

# الوحدة الأولى : الاعداد الحقيقية

## الصف الثانى الاعدادى

## الفصل الدراسى الأول ٢٠٢٠

- مجموعة الأعداد الغير نسبية
- مجموعة الأعداد الحقيقية
- الفترات – العمليلت على الفترات
- العمليات على الأعداد الحقيقية
- العمليات على الجذور التكعيبية

# الوحدة الأولى : الاعداد الحقيقية

## الجذر التربيعى للعدد النسبى الموجب أ هو العدد الذى مربعه يساوى أ

**تعريف :**

* الرمز $\sqrt{أ^{٢}}$ = أ يعنى الجذر التربيعى الموجب للعدد النسبى الموجب أ
* الرمز - $\sqrt{أ^{٢}}$ = - أ يعنى الجذر التربيعى السالب للعدد النسبى الموجب أ
* $\sqrt{\text{صفر}}$ = صفر * $\sqrt{\text{عدد سالب}}$ ( ليس له معنى )
* الجذر التربيعى للعدد النسبى ٢٥ = $\pm$ ٥
* الجذرين التربيعين للعدد النسبى ٤٩ = $\pm$ ٧
* إذا كان أ عدد نسبى مربع كامل فان الجذرين التربيعيين للعدد أ كلا منهما عددا نسبيا وكلا منهما معكوس جمعى للجذر الاخر
* مجموعة حل المعادلة س$^{٢}$ = أ$^{٢}$ هى { أ ، - أ }
* مجموعة حل المعادلة س$^{٢}$ + ٤ = ٠ يساوى $\phi$ ( لانه لا يوجد جذر تربيعى للعدد -٤)
* $\sqrt{أ^{٢}}$ = أ ، $\sqrt{أ^{٤}}$ = أ$^{٢}$ ، $\sqrt{أ^{٦}}$ = أ$^{٣}$ ، $\sqrt{أ^{٨}}$ = أ$^{٤}$ وهكذا .........
* $\sqrt{(-٣)^{٢}}$ = ٣ ، $\sqrt{(٣)^{٢}}$ = ٣
* $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ ولا يساوى ٣ + ٤ = ٧ (فهذا خطأ )
* $\sqrt{٦\frac{١}{٤}} = \sqrt{\frac{٢٥}{٤}} = \frac{٥}{٢}$

**ملاحظة هامة**

* أذا كان س ص = ٠ فان س = ٠ أو ص = ٠

**مثــال ١ : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية**

(أ) (س – ٢)( س +٣) = ٠ (ب) س$^{٢}$ – ٣ س = ٠

(أ) فان س – ٢ = ٠ أو س + ٣ = ٠
∴ س = ٢ ، س = -٣
∴ م.ح = { ٢ ، -٣ }

(ب) فإن س ( س – ٣ ) = ٠
س = ٠ ، س = ٣
∴ م.ح = { ٠ ، ٣ }

## التمرين الأول: أكمل كلا مما يأتى

١) الجذر التربيعى للعدد ٣٦ = ....... بينما الجذر التربيعى للعدد ١٠٠ = .......

٢) الجذرين التربيعيين للعدد ٨١ = ..... بينما الجذرين التربيعيين للعدد ١٤٤ = ....

٣) الجذرين التربيعيين للعدد $٢\frac{١}{٤}$ = ........ بينما الجذرين التربيعيين للعدد $٢\frac{٧}{٩}$ = .....

٤) $\sqrt{(-٥)^{٢}}$ = ......... ، $\sqrt{(٣)^{٤}}$ = ......

٥) $\sqrt{٣٦ + ٦٤}$ = .......... ، $\sqrt{١٠٠ - ٣٦}$ = .........

٦) $\sqrt{(٣)^{٢} + (٤)^{٢}}$ = ........ ، $\sqrt{(١٣)^{٢} - (١٢)^{٢}}$ = .......

٧) $\sqrt{١٦} + \sqrt{٩}$ = ...... ، $\sqrt{١٠٠} - \sqrt{١٦}$ = .........

٨) $-\sqrt{٦٤}$ = ...... ، $-\sqrt{١٦٩}$ = .....

٩) $\sqrt{\frac{٤٩}{٤}} + \sqrt{٢\frac{١}{٤}}$ = ...... ، $\sqrt{\frac{٩}{٢٥}} + \sqrt{١\frac{١١}{٢٥}}$ = ........

١٠) المربع الذى طول ضلعه ٥ سم تكون مساحته = ........ ومحيطه = ..........

١١) المربع الذى مساحته ٢٢٥سم$^{٢}$ يكون طول ضلعه = ..... ومحيطه = ........

١٢) المربع الذى مساحته ٤٠٠سم$^{٢}$ يكون طول ضلعه = ....... ومحيطه = ......

١٣) مجموعة حل المعادلة س$^{٢}$ – ٩ = ٠ هى ........

١٤) مجموعة حل المعادلة س$^{٢}$ + ٩ = ٠ هى .........

١٥) مجموعة حل المعادلة س$^{٢}$ – س = ٠ هى .............

١٦) مجموعة حل المعادلة س$^{٢}$ = ٢س هى .............

١٧) مجموعة حل المعادلة س$^{٢}$ + ٥ = ٠ هى .............

١٨) مجموعة حل المعادلة س$^{٢}$ + س = ٠ هى .........

١٩) مجموعة حل المعادلة (س+١)(س-٣) هى ...............

٢٠) $\sqrt{٢٥\%}$ = ........ ، $\sqrt{٠.٦٤}$ = ....... ، $\sqrt{١٠,٢٤}$ = .........

٢١) مربع مساحته ٦.٢٥ سم$^{٢}$ يكون طول ضلعه = ..........

٢٢) $\sqrt{م^{٦}ب^{٤}جـ^{٢}}$ = .................

## التمرين الثانى: أكمل العبارات الاتية

(١) المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt{٢٥}$ هو .......

(٢) $\sqrt{١٦ + ٩} = ٤ +$ ......        (٣) $\sqrt{١٠٠ - ٣٦} = ١٠ -$ .........

(٤) إذا كان $\sqrt{س} = ٤$ فإن س = ............

(٥) إذا كان $\sqrt{س + ١} = ٣$ فإن س = ..........

(٦) إذا كان $\sqrt{س - ٢} = ٥$ فإن س = ..........

(٧) إذا كان $\sqrt[٣]{س} = ٣$ فإن س = ..........

(٨) إذا كان $\sqrt{س} = \frac{٢}{٣}$ فإن س = ..........

(٩) إذا كان $\sqrt{س} = ١\frac{١}{٢}$ فإن س = .........

---

### مثــ١ــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) $س^٢ = ٢٥$        (ب) $٢س^٢ - ٣ = ١٥$

**الحــــــــل**

(أ) بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

$س = \sqrt{٢٥} = \pm ٥$

∴ م.ح = {٥ ، −٥}

(ب) $٢س^٢ = ١٥ + ٣$

$٢س^٢ = ١٨ \Leftarrow س^٢ = \frac{١٨}{٢} = ٩$

$س = \sqrt{٩} = \pm ٣$

---

### مثــ٢ــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) $س^٢ - ١ = ٠$        (ب) $\frac{١}{٢} س^٢ = ٣٢$

**الحــــــــل**

(أ) $س^٢ = ١$

$س = \sqrt{١} = \pm ١$

∴ م.ح = {١ ، −١}

(ب) بضرب الطرفين × ٢ $\Leftarrow س^٢ = ٦٤$

$س = \sqrt{٦٤} = \pm ٨$

∴ م.ح = {٨ ، −٨}

**مثـ٣ـال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية**

(أ) س$^{٢}$ + ٨ = ٣٣ (ب) ٤س$^{٢}$ = ٩

**الحـــــل**

(أ) س$^{٢}$ = ٣٣ ـ ٨ = ٢٥
س = $\sqrt{٢٥}$ = ± ٥
∴ م.ح = { ٥ ، ـ ٥ }

(ب) س$^{٢}$ = $\frac{٩}{٤}$
س = $\sqrt{\frac{٩}{٤}}$ = ± $\frac{٣}{٢}$
∴ م.ح = { $\frac{٣}{٢}$ ، ـ $\frac{٣}{٢}$ }

---

**مثـ٤ـال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية**

(أ) ٢س$^{٢}$ ـ ٢٠٠ = ٠ (ب) $\frac{٣}{٥}$ س$^{٢}$ - ١ = ٥٩

**الحـــــل**

(أ) ٢س$^{٢}$ = ٢٠٠
س$^{٢}$ = $\frac{٢٠٠}{٢}$ = ١٠٠
س = $\sqrt{١٠٠}$ = ± ١٠
∴ م.ح = {١٠ ، ـ ١٠}

(ب) $\frac{٣}{٥}$ س$^{٢}$ = ٥٩ + ١ = ٦٠
س$^{٢}$ = ٦٠ × $\frac{٥}{٣}$ = ١٠٠
س = $\sqrt{١٠٠}$ = ±١٠
∴ م.ح = {١٠ ، ـ ١٠}

---

**مثـ٥ـال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية**

(أ) ٥س$^{٢}$ +١ = ٢١ (ب) $\frac{٢}{٧}$س$^{٢}$ + ٣ = ٣١

**الحـــــل**

(أ) ٥س$^{٢}$ = ٢١ ـ ١ = ٢٠
س$^{٢}$ = $\frac{٢٠}{٥}$ = ٤
س = $\sqrt{٤}$ = ± ٢
∴ م.ح = { ٢ ، ـ٢}

(ب) $\frac{٢}{٧}$س$^{٢}$ = ٥٩ ـ ٣ = ٥٦
س$^{٢}$ = ٥٦ × $\frac{٧}{٢}$ = ١٩٦
س = $\sqrt{١٦٩}$ = ± ١٣
∴ م.ح = { ١٣ ، ـ ١٣ }

---

**تمرين أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية**

(١) ٢س$^{٢}$ = ١٨ (٢) س$^{٢}$ +٢ = ١٨ (٣) ٢س$^{٢}$ +١ = ٧٣

(٤) ٣س$^{٢}$ = ٧٥ (٥) س$^{٢}$ ـ ٣ = ٣٣ (٦) ٣س$^{٢}$ ـ ١ = ٢٩٩

(٧) ٤س$^{٢}$ = ٢٥ (٨) س$^{٢}$ ـ ٢٥ = ٠ (٩) ٥س$^{٢}$ + ١ = ٢١

# الجذر التكعيبى لعدد نسبى

**الجذر التكعيبى لعدد نسبى م هو العدد الذى مكعبه يساوى**

$\sqrt[٣]{٨} = ٢$ لان $(٢)^٣ = ٨$ $\qquad$ $\sqrt[٣]{٢٧} = ٣$ لان $(٣)^٣ = ٢٧$

$\sqrt[٣]{-٨} = -٢$ لان $(-٢)^٣ = -٨$ $\qquad$ $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$ لان $(-٣)^٣ = -٢٧$

$\sqrt[٣]{م^٣} = م$ ، $\sqrt[٣]{م^٩} = م^٣$ ، $\sqrt[٣]{ب^{١٢}} = ب^٤$

**لاحظ أن** $\sqrt[٣]{-م^٣} = -\sqrt[٣]{م^٣} = -أ$ $\qquad$ **فمثلاً:** $\sqrt[٣]{-١٢٥} = -\sqrt[٣]{١٢٥} = -٥$

---

## تمرين(١) : أكمل العبارات الاتية

(١) $\sqrt[٣]{٦٤} =$ ....... $\qquad$ (٢) $\sqrt[٣]{-١٠٠٠} =$ ..........

(٣) $\sqrt[٣]{٣٤٣} =$ ........ $\qquad$ (٤) $\sqrt[٣]{-٢١٦} =$ .......

(٥) $\sqrt[٣]{\frac{٢٧}{٨}} =$ ........ $\qquad$ (٦) $\sqrt[٣]{\frac{-٢٧}{٦٤}} =$ ..........

(٧) $\sqrt[٣]{\frac{١٢٥}{٢٧}} =$ .......... $\qquad$ (٨) $\sqrt[٣]{٣\frac{٣}{٨}} = \sqrt[٣]{.........} =$ ........

(٩) $\sqrt[٣]{ب^{١٥}} =$ ......... $\qquad$ (١٠) $\sqrt[٣]{م^٦ ب^٣} =$ ..........

---

## تمرين (٢) أكمل العبارات الاتية

(١) $\sqrt[٣]{٣٠ - ٣} =$ ........ $\qquad$ (٢) $\sqrt[٣]{١٢٥} - \sqrt[٣]{-١٢٥} =$ ........

(٣) $٥ \sqrt[٣]{٢٧} =$ ......... $\qquad$ (٤) $٣ \sqrt[٣]{-١٢٥} =$ ......

(٥) $\sqrt{١٠٠} - \sqrt[٣]{-٢٧} =$ ........ $\qquad$ (٦) $٥ - \sqrt[٣]{-٨} =$ ......

(٧) $\sqrt[٣]{٢} \times \sqrt[٣]{٤} =$ ....... $\qquad$ (٨) $\sqrt[٣]{٥} \times \sqrt[٣]{٥} \times \sqrt[٣]{٥} =$ ......

(٩) $\sqrt{٦٤} + \sqrt[٣]{-٨} =$ ....... $\qquad$ (١٠) $\sqrt[٣]{(-٢٧)^٢} =$ ........

(١١) المعكوس الجمعى للعدد $\sqrt[٣]{-١٢٥}$ .... $\qquad$ (١٢) المعكوس الضربى للعدد $\sqrt[٣]{٨}$ ....

**مثـــال ١ : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية**

أ) $س^٣ = ١٢٥$ ب) $س^٣ - ١ = ٠$

**الحـــــل**

أ) بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

$س = \sqrt[٣]{١٢٥} = ٥$

$\therefore$ م . ح = { ٥ }

ب) بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

$س = \sqrt[٣]{١} = ١$

$\therefore$ م . ح = { ١ }

**مثـــال ٢ : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية**

أ) $س^٣ + ٨ = ٠$ ب) $٢س^٣ - ٥٤ = ٠$

**الحـــــل**

أ) بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

$س^٣ = -٨$

$س = \sqrt[٣]{-٨} = -٢$

$\therefore$ م . ح = {-٢}

ب) بأخذ الجذر التكعيبى للطرفين

$٢س^٣ = ٥٤ \Longleftarrow س^٣ = ٢٧$

$س = \sqrt[٣]{٢٧} = ٣$

$\therefore$ م . ح = { ٣ }

**مثـــال ٣ : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية**

أ) $٥س^٣ + ١ = ٤١$ ب) $٢س^٣ - ٣ = ٢٤٧$

**الحـــــل**

أ) $٥س^٣ = ٤١ - ١ = ٤٠$

$س^٣ = \frac{٤٠}{٥} = ٨$

$س = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

$\therefore$ م . ح = { ٢ }

ب) $٢س^٣ = ٢٤٧ + ٣ = ٢٥٠$

$س^٣ = \frac{٢٥٠}{٢} = ١٢٥$

$س = \sqrt[٣]{١٢٥} = ٥$

$\therefore$ م . ح = { ٥ }

**مثـــال ٤ : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية**

أ) $\frac{١}{٢} س^٣ = ٣٢$ ب) $٢٧س^٣ = ١٢٥$

**الحـــــل**

أ) بضرب الطرفين × ٢

$س^٣ = ٣٢ \times ٢ = ٦٤$

$س = \sqrt[٣]{٦٤} = ٤$ $\therefore$ م . ح = { ٤ }

ب) $س^٣ = \frac{١٢٥}{٢٧}$

$س = \sqrt[٣]{\frac{١٢٥}{٢٧}} = \frac{٥}{٢}$

$\therefore$ م . ح = { $\frac{٥}{٢}$ }

**مثـــال ٥ : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية**

(أ) $(س^٢ - ٤)(س^٣ + ١) = ٠$ (ب) $س^٢ (س^٣ - ١) = ٠$

## الحـــــل

(أ) $س^٢ - ٤ = ٠$ ، $س^٣ + ١ = ٠$

$س^٢ = ٤$ ، $س^٣ = -١$

$س = \sqrt{٤} = \pm ٢$ ، $س = \sqrt[٣]{-١} = -١$

∴ م٠ح = {٢ ، -٢ ، -١}

(ب) $س^٢ = ٠$ ، $س^٣ - ١ = ٠$

$س = ٠$ ، $س^٣ = ١$

$س = ٠$ ، $س = \sqrt[٣]{١} = ١$

∴ م٠ح = { ٠ ، ١ }

**مثـــال ٦ : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية**

(أ) $(س^٢ + ٩)(س^٣ - ٨) = ٠$ (ب) $س^٣ - ٥ س^٢ + ٦ س = ٠$

## الحـــــل

(أ) $س^٢ + ٩ = ٠$ ، $س^٣ - ٨ = ٠$

$س^٢ = -٩$ ، $س^٣ = ٨$

مرفوض ، $س = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

∴ م٠ح = { ٢ }

(ب) $س (س^٢ - ٥س + ٦) = ٠$

$س (س - ٢)(س - ٣) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٢$ ، $س = ٣$

∴ م٠ح = { ٠ ، ٢ ، ٣ }

**مثـــال ٧ : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية**

(أ) $س (س^٢ - ١)(س^٣ + ١٢٥) = ٠$ (ب) $س^٣ = ٤ س$

## الحـــــل

(أ) $س = ٠$ ، $س^٢ - ١ = ٠$ ، $س^٣ + ١٢٥ = ٠$

$س^٢ = ١$ ، $س^٣ = -١٢٥$

$س = \sqrt{١}$ ، $س = \sqrt[٣]{-١٢٥}$

$س = \pm ١$ ، $س = -٥$

∴ م٠ح = { ٠ ، ١ ، -١ ، -٥ }

(ب) $س^٣ - ٤ س = ٠$

$س (س^٢ - ٤) = ٠$

$س (س - ٢)(س + ٢) = ٠$

$س = ٠$ ، $س = ٢$ ، $س = -٢$

∴ م٠ح = { ٠ ، ٢ ، -٢ }

**مثــ٨ــال : أحسب قيمة كلا مما يأتى**

(أ) $\sqrt{\dfrac{5^{4} \times 3^{2}}{7^{4}}}$  (ب) $\sqrt{\dfrac{3^{6} \times 2^{10}}{5^{8}}}$  (ج) $\sqrt[3]{\dfrac{7^{6}}{11^{3}} \times 5^{9}}$

## الحــــل

(أ) $\sqrt{\dfrac{5^{4} \times 3^{2}}{7^{4}}} = \dfrac{5^{2} \times 3^{1}}{7^{2}} = \dfrac{75}{49}$

(ب) $\sqrt{\dfrac{3^{6} \times 2^{10}}{5^{8}}} = \dfrac{3^{3} \times 2^{5}}{5^{4}} = \dfrac{27 \times 32}{625} = \dfrac{864}{625}$

(ج) $\sqrt[3]{\dfrac{7^{6}}{11^{3}} \times 5^{9}} = \dfrac{7^{2}}{11} \times 5^{3} = \dfrac{49}{11} \times 125 = \dfrac{6125}{11}$

---

## تمـــــارين

**أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية**

(١) س$^{٣}$ – ١ = ٠

(٢) س$^{٣}$ +٨ = ٠

(٣) ٢س$^{٣}$ – ٢٥٠ = ٠

(٤) ٥س$^{٣}$ – ٤٠ = ٠

(٥) س$^{٣}$ – ١ = ٢٦

(٦) س$^{٣}$ +٢ = ٦٦

(٧) ٨س$^{٣}$ – ١٢٥ = ٠

(٨) ١٢٥ س$^{٣}$ = ٦٤

(٩) ٢س$^{٣}$ + ١ = ٥٥

(١٠) ٤س$^{٣}$ + ٢ = ٥٠٢

(١١) ٥س$^{٣}$ – ١ = ١٣٤

(١٢) ( س$^{٢}$ – ١ )( س$^{٣}$ +٨ ) = ٠

(١٣) ( س$^{٢}$ +٦٤ )( س$^{٣}$ +١ ) = ٠

(١٤) ( س$^{٢}$ – ٩ ) ( س$^{٣}$ – ١٢٥ ) = ٠

(١٥) س ( ١ – س$^{٢}$ )( س$^{٣}$ - ١٠٠٠ ) =

(١٦) س$^{٢}$ ( س$^{٢}$ +٢٥)( س$^{٣}$ + ٢٧ ) = ٠

(١٧) س$^{٢}$ ( ٣س$^{٢}$ – ١٢ )( س$^{٣}$ – ٢١٦ ) = ٠

(١٨) س$^{٥}$ ( ٢س$^{٣}$ – ٥٤ ) = ٠

(١٩) ( س$^{٢}$ – ٥س +٦ )( س$^{٣}$ – س ) = ٠

(٢٠) س ( ٣٠٠٠ – ٣ س$^{٣}$ ) = ٠

(٢١) ( س$^{٢}$ – س ) ( س$^{٣}$ +٣٤٣ ) = ٠

(٢٢) ( ٣س$^{٢}$ – ٧٥ )( ٥س$^{٣}$ – ٤٠ ) = ٠

# مجموعة الاعداد الغير نسبية

يوجد كثير من الاعداد التى لا يمكن وضعها على الصورة س/ص مثل

(١) الجذور التربيعية للاعداد التى ليست مربع كامل

√٢ ، √٣ ، √٥ ، √٦ ، √٧ ، √٨ ، √١٠ ، .............. وهكذا

(٢) الجذور التكعيبية للاعداد التى ليست مكعب كامل

∛٢ ، ∛٣ ، ∛٤ ، ∛٥ ، ∛٦ ، ∛٧ ، ∛٩ ، ∛١٠ ، ........ وهكذا

(٣) النسبية التقريبية ط

هذه الاعداد كلها تسمى مجموعة الاعداد الغير نسبية والتى يرمز لها بالرمز ن/

**لاحظ أن**

[١] ن ∩ ن/ = ϕ

[٢] كل عدد غير نسبى ينحصر بين عددين نسبيين

فمثلا ٤ > ٥ > ٩ ولهذا فإن ٢ > √٥ > ٣

---

**التمرين الأول : ضع خط تحت الأعداد الغير نسبية ودائرة حول الأعداد النسبية**

√٦ ، ∛٨ ، ٢٢/٧ ، √٧ ، √٩ ، ∛٢٥ ، ٠/٢ ، ∛٥٩ ، ٣/٠ ، ∛١٠

**التمرين الثانى : أكمل العبارات الاتية**

(١) ٤ > ٧ > ٩ فإن ٢ > √٧ > ٣

(٢) ١ > ٣ > ٤ فإن ..... > √٣ > .....

(٣) ..... > ١٠ > ..... فإن ٣ > √١٠ > ٤

(٤) ..... > ١٧ > ..... فإن ..... > √١٧ > .....

(٥) ..... > ٢٩ > ..... فإن ..... > √٢٩ > .....

(٦) ..... > ٤١ > ..... فإن ..... > √٤١ > .....

(٧) ..... > ٥٥ > ..... فإن ..... > √٥٥ > .....

(٨) ..... > ٧٠ > ..... فإن ..... > √٧٠ > .....

مثـــــال ١: أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) س$^{٢}$ ـ ١ = ٤ (ب) س$^{٣}$ ـ ٢ = ٥

الحـــــل

(أ) س$^{٢}$ = ٤ +١ = ٥

س = ± $\sqrt{٥}$

∴ م ٠ ح = {± $\sqrt{٥}$ }

(ب) س$^{٣}$ = ٥+٢= ٧

س = $\sqrt[٣]{٧}$

∴ م ٠ ح = { $\sqrt[٣]{٧}$ }

مثـــــال ٢: أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) س$^{٢}$ + ٣ = ١٠ (ب) س$^{٣}$ ـ ١ = ٤

الحـــــل

(أ) س$^{٢}$ = ١٠ ـ ٣ = ٧

س = ± $\sqrt{٧}$

∴ م ٠ ح = { ± $\sqrt{٧}$ }

(ب) س$^{٣}$ = ٤+١= ٥

س = $\sqrt[٣]{٥}$

∴ م ٠ ح = { $\sqrt[٣]{٥}$ }

مثـــــال ٣: أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) ٢س$^{٢}$ + ١ = ٧ (ب) ٣س$^{٣}$ +٢ = ١٤

الحـــــل

(أ) ٢س$^{٢}$ = ٧ ـ ١ = ٦

س$^{٢}$ = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

س = ± $\sqrt{٣}$

∴ م ٠ ح = { ± $\sqrt{٣}$ }

(ب) ٣س$^{٣}$ = ١٤ ـ ٢ = ١٢

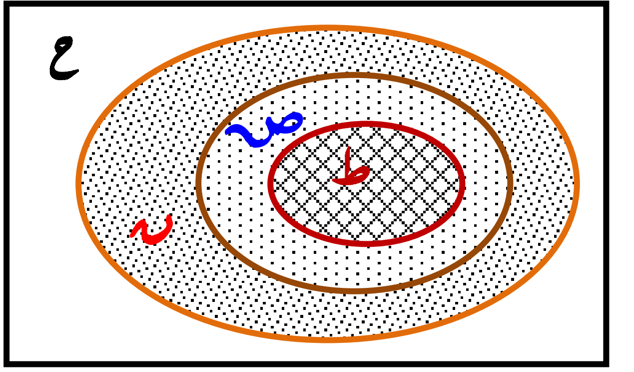
س$^{٣}$ = $\frac{١٢}{٣}$ = ٤

س = $\sqrt[٣]{٤}$

∴ م ٠ ح = { $\sqrt[٣]{٤}$ }

# مجموعة الأعداد الحقيقية

مجموعة الأعداد الحقيقية هى المجموعة الناتجة من أتحاد مجموعة الأعداد النسبية ومجموعة الأعدادالغير نسبية




$ع = ن \cup ن'$

لاحظ أن : $ط \subset ص \subset ن \subset ع$

**ملاحظات**

(١) $ع^{*} = ع - \{٠\}$

(٢) $ع = ع^{+} \cup ع^{-}$

(٣) $ع^{+} = \{ س : س \in ع ، س > ٠ \}$

(٤) $ع^{-} = \{ س : س \in ع ، س < ٠ \}$

(٥) مجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة $= ع_{+} \cup \{٠\} = \{س : س \in ع ، س \geq ٠\}$

(٦) مجموعة الاعداد الحقيقية غير الموجبة $= ع_{-} \cup \{٠\} = \{س : س \in ع ، س \leq ٠\}$

(٧) كل عدد حقيقى تمثله نقطة وحيدة على خط الأعداد

(٨) الاعداد الحقيقية المتساوية تمثلها نقطة وحيدة على خط الاعداد

(٩) كل عدد غير نسبى تنحصر قيمته بين عددين نسبيين

---

**التمرين الأول : أكمل مكان النقط بوضع [ $<$ ، $=$ ، $>$ ]**

(١) $\sqrt{٥}$ ........... $\sqrt{٣}$

(٢) $-\sqrt{٧}$ ......... $-\sqrt{٥}$

(٣) $\sqrt{٥}$ ......... $-\sqrt{٧}$

(٤) $\sqrt{٣}$ ......... $\sqrt[٣]{٧}$

(٥) $-\sqrt{٧}$ ......... $-\sqrt[٣]{٧}$

(٦) $(١ + \sqrt{٢})$ ..... ٢

(٧) $\sqrt{٩}$ .......... $\sqrt[٣]{٢٧}$

(٨) $\sqrt{١٦}$ ......... $-\sqrt[٣]{-٦٤}$

(٩) صفر .......... $\sqrt[٣]{-٢٧}$

(١٠) $-\sqrt{٢٥}$ ......... $\sqrt[٣]{-١٢٥}$

(١١) $(\sqrt{٥} - \sqrt{٣})$ ........ صفر

(١٢) $(\sqrt{٣} - \sqrt{٥})$ ........ صفر

**مثـــــ١ــال : رتب الأعداد الاتية ترتيباً تنازلياً**

$\sqrt[3]{-٨}$ ، $\sqrt{١٥}$ ، $\sqrt[3]{٨}$ ، صفر ، $-\sqrt{٧}$

**الحـــــل**

الأعداد الموجبة $\sqrt{١٥} > \sqrt[3]{٨} >$ صفر

الأعداد السالبة $\sqrt[3]{-٨} > -\sqrt{٧}$

الترتيب التنازلى هو $\sqrt{١٥} > \sqrt[3]{٨} >$ صفر $> \sqrt[3]{-٨} > -\sqrt{٧}$

---

**مثـــــ٢ــال : رتب الأعداد الأتية ترتيباً تصاعديا**

$\sqrt{١٧}$ ، $\sqrt[3]{-٢٥}$ ، $\sqrt{١٥}$ ، $-\sqrt{٤}$ ، $\sqrt{٢٥}$

**الحـــــل**

الأعداد السالبة $\sqrt[3]{-٢٥} < -\sqrt{٤}$

الأعداد الموجبة $\sqrt{١٥} < \sqrt{١٧} < \sqrt{٢٥}$

الترتيب التصاعدى هو $\sqrt[3]{-٢٥} < -\sqrt{٤} < \sqrt{١٥} < \sqrt{١٧} < \sqrt{٢٥}$

---

**التمرين الثانى :** أكمل الجدول الاتى

| العدد | عدد طبيعى | عدد صحيح | عدد نسبى | عدد غير نسبى | عدد حقيقى |
|---|---|---|---|---|---|
| صفر | | | | | |
| ٣- | | | | | |
| ٥ | | | | | |
| $\frac{٣}{٥}$ | | | | | |
| $\sqrt{٦}$ | | | | | |
| ط | | | | | |
| $\frac{٦}{٣}$ | | | | | |

# الفتـــــــرات

## الفترات المحددة

**الفترة المغلقة [ أ ، ب ]**

[أ ، ب] = { س : س ∈ ح ، أ ≤ س ≤ ب }

أ                                        ب

أ ∈ [أ ، ب] ، ب ∈ [أ ، ب]

**الفترة المفتوحة ] أ ، ب [**

]أ ، ب[ = { س : س ∈ ح ، أ < س < ب }

أ                                        ب

أ ∉ ]أ ، ب[ ، ب ∉ ]أ ، ب[

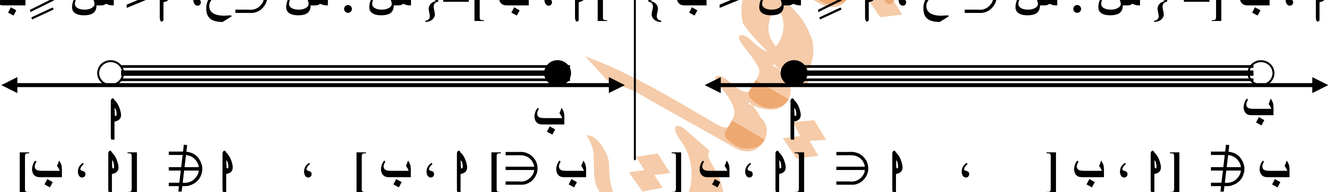
## الفترات النصف مفتوحة ( النصف مغلقة )

[أ ، ب[

[أ ، ب[ = { س : س ∈ ح ، أ ≤ س < ب }

]أ ، ب]

]أ ، ب] = { س : س ∈ ح ، أ < س ≤ ب }



أ ∈ [أ ، ب[ ، ب ∉ [أ ، ب[

ب ∈ ]أ ، ب] ، أ ∉ ]أ ، ب]

## ثانيا : الفترات الغير محددة

**فترة نصف مغلقة [أ ، ∞[**

[أ ، ∞[ = { س : س ∈ ح ، س ≥ أ }

أ

أ ∈ [أ ، ∞[

**فترة مفتوحة ] أ ، ∞[**

]أ ، ∞[ = { س : س ∈ ح ، س > أ }

أ

أ ∉ ]أ ، ∞[

**فترة نصف مغلقة ]- ∞ ، أ]**

]- ∞ ، أ] = { س : س ∈ ح ، س ≤ أ }

أ

أ ∈ ]- ∞ ، أ]

**فترة مفتوحة ]- ∞ ، أ[**

]- ∞ ، أ[ = { س : س ∈ ح ، س < أ }

أ

أ ∉ ]- ∞ ، أ[

**لاحــــــظ أن:**

(١) مجموعة الاعداد الحقيقية يمكن التعبير عنها على الصورة ] - ∞ ، ∞ [

(٢) مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة ح+ = ] ٠ ، ∞ [

(٣) مجموعة الاعداد الحقيقية السالبة ح- = ] - ∞ ، ٠ [

(٤) مجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة = [ ٠ ، ∞ [

(٥) مجموعة الاعداد الحقيقية غير الموجبة = ] - ∞ ، ٠ ]

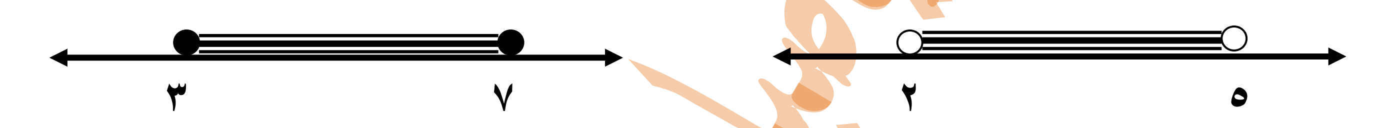
---

**مثـــال١: أكتب على صورة فترة كلا من المجموعات الاتية**

(أ) س ={س: س ∈ ح ، ٢ < س < ٥}   (ب) ص = {س: س ∈ ح ، ٣ ⩽ س ⩽ ٧ }

**الحـــــل**

(أ) س = ] ٢ ، ٥ [   (ب) ص = [ ٣ ، ٧ ]



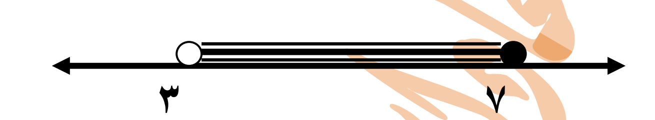

---

**مثـــال٢: أكتب على صورة فترة كلا من المجموعات الاتية**

(أ) ن = {س : س ∈ ح ، ٢ ⩽ س < ٥ }   (ب) هـ = {س : س ∈ ح ، ٣ < س ⩽ ٧ }

**الحـــــل**

(أ) ن = [ ٢ ، ٥ [   (ب) هـ = ] ٣ ، ٧ ]







---

**مثـــال٣: أكتب على صورة فترة كلا من المجموعات الاتية**

(أ) و = {س : س ∈ ح ، س < ٥ }   (ب) ش = {س : س ∈ ح ، س ⩽ ٧ }

**الحـــــل**

(أ) و = ] - ∞ ، ٥ [   (ب) ش = ] - ∞ ، ٧ ]

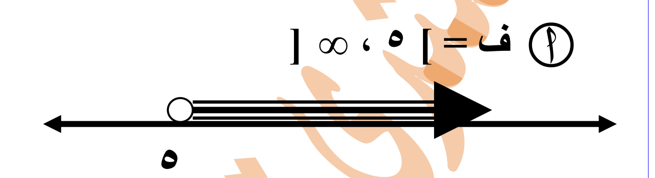


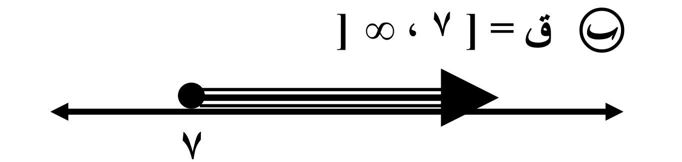
مثـــال٤: أكتب على صورة فترة كلا من المجموعات الاتية

(أ) ف = {س : س ∋ ح ، س > ٥ }      (ب) ق = {س : س ∋ ح ، س ⩾ ٧ }

الحـــــل

(أ) ف = ] ٥ ، ∞ [      (ب) ق = [ ٧ ، ∞ [





# العمليات على الفترات

**الاتحاد:** أ ∪ ب = جميع العناصر الموجودة فى المجموعتين

(١) [-٢ ، ٥ ] ∪ [ ١ ، ٩ [ = [ -٢ ، ٩ [

(٢) ] ٠ ، ٤ [ ∪ [ -٣ ، ٩ [ = [ -٣ ، ٩ [

(٣) ] - ∞ ، ٧ [ ∪ ] ٣ ، ∞ [ = ] - ∞ ، ∞ [ = ح

(٤) ] - ∞ ، ٣ [ ∪ ] ٧ ، ∞ [ = ح – [٣ ، ٧ ]

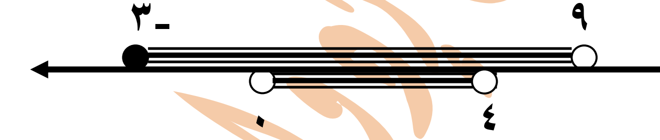
**التقـــاطع:** أ ∩ ب = جميع العناصر المشتركة بين المجموعتين

(١) [-٢ ، ٥ ] ∩ [ ١ ، ٩ [ = [ ١ ، ٥ ]

(٢) ] ٠ ، ٤ [ ∩ [ -٣ ، ٩ [ = ] ٠ ، ٤ [

(٣) ] - ∞ ، ٧ [ ∩ ] ٣ ، ∞ [ = ]٣ ، ٧ [

(٤) [-٣ ، ٢ ] ∩ [ ٥ ، ٩ ] = ∅



**الفرق:** م - ب = جميع العناصر الموجودة فى م وغير موجودة فى ب

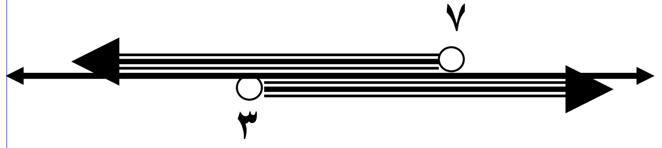
(١) [-٢ ، ٥] - [١ ، ٩[ = [-٢ ، ١[

ب ـ م = جميع العناصر الموجودة فى ب وغير موجودة فى م

(٢) [-٢ ، ٥] - [١ ، ٩[ = ]٥ ، ٩[

**ملاحظة هامة :** م ـ ب ≠ ب ـ م

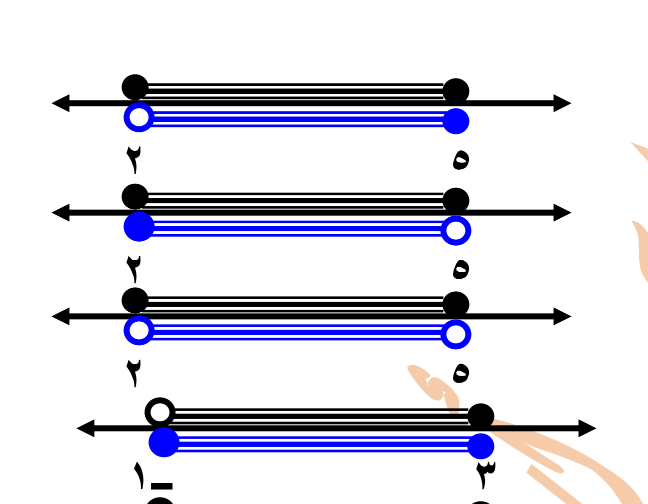
(٣) ]٠ ، ٤[ - [-٣ ، ٩[ = ∅



(٤) ]-∞ ، ٧[ - ]٣ ، ∞[ = ]-∞ ، ٣]

---

**لاحـــظ أن :**



(١) [٢ ، ٥] – { ٢ } = ]٢ ، ٥]

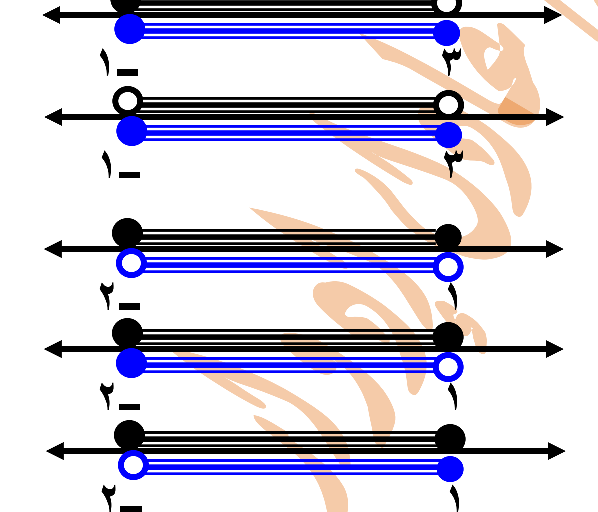
[٢ ، ٥] – { ٥ } = [٢ ، ٥[

[٢ ، ٥] – { ٢ ، ٥ } = ]٢ ، ٥[

(٢) ]-١ ، ٣] ∪ {-١} = [-١ ، ٣]

[-١ ، ٣[ ∪ {٧} = [-١ ، ٣]

]-١ ، ٣[ ∪ { -١ ، ٣ } = [-١ ، ٣]



(٣) [-٢ ، ١] – ]-٢ ، ١[ = { -٢ ، ١ }

[-٢ ، ١] – [-٢ ، ١[ = { ١ }

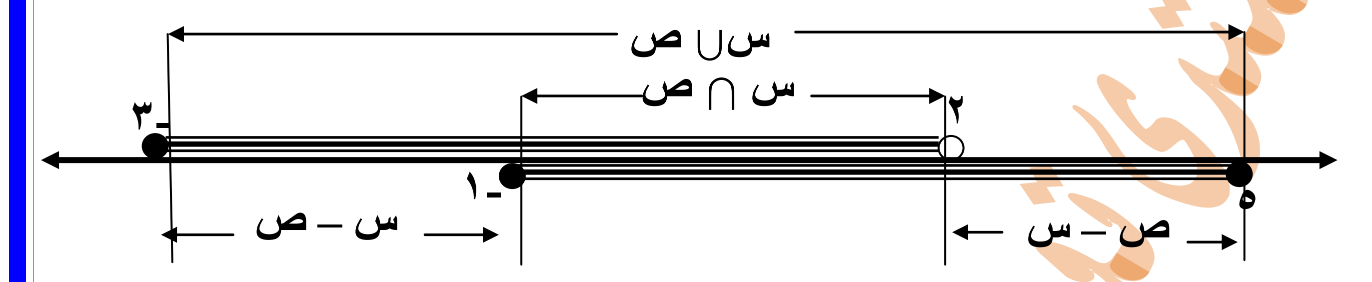
[-٢ ، ١] – ]-٢ ، ١] = { -٢ }

(٤) { ٣ } – [٢ ، ٥] = ∅ ، { ٣ } – [٥ ، ٩] = { ٣ }

**مثـ١ـال : إذا كانت س = [ -٣ ، ٢ ] ، ص = [-١ ، ٥ ] فأوجد مستعينا بخط الاعداد**

**(١) س ∪ ص (٢) س ∩ ص (٣) س – ص (٤) ص – س**

## الحـــــــل




**(١) س ∪ ص = [ -٣ ، ٢ ] ∪ [-١ ، ٥ ] = [-٣ ، ٥ ]**

**(٢) س ∩ ص = [ -٣ ، ٢ ] ∩ [-١ ، ٥ ] = [-١ ، ٢ ]**

**(٣) س – ص = [ -٣ ، ٢ ] - [-١ ، ٥ ] = [-٣ ، -١ [**

**(٤) ص – س = [-١ ، ٥ ] - [ -٣ ، ٢ ] = ]٢ ، ٥ ]**

---

**مثـ٢ـال : إذا كانت س = [-١ ، ٧ [ ، ص = ]١ ، ٤ [ مثلهما على خط الاعداد ثم أوجد**

**(١) س ∪ ص (٢) س ∩ ص (٣) س – ص (٤) ص – س**

## الحـــــــل




**(١) س ∪ ص = [-١ ، ٧ [ ∪ ]١ ، ٤ [ = [ -١ ، ٧ [**

**(٢) س ∩ ص = [-١ ، ٧ [ ∩ ]١ ، ٤ [ = ]١ ، ٤ [**

**(٣) س – ص = [-١ ، ٧ [ - ]١ ، ٤ [ = [-١ ، ١ ] ∪ [٤ ، ٧ [**

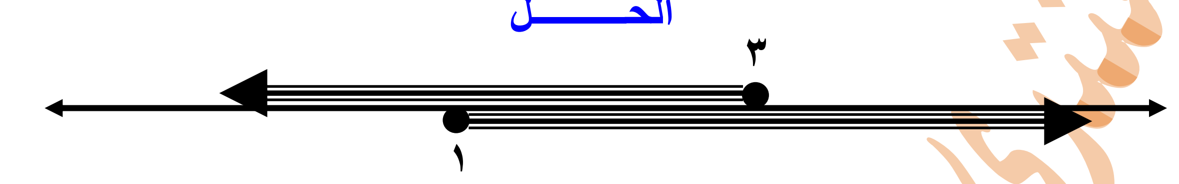
**(٤) ص – س = ϕ**

---

مثــ٣ــال : إذا كانت س = ]- ∞ ، ٣ [ ، ص = ]١ ، ∞ [ مثلهما على خط الاعداد ثم أوجد

(١) س ∪ ص  (٢) س ∩ ص  (٣) س – ص  (٤) ص – س

الحــــــل




(١) س ∪ ص = ]- ∞ ، ٣ [ ∪ ]١ ، ∞ [ = ]- ∞ ، ∞ [ = ح

(٢) س ∩ ص = ]-∞ ، ٣ [ ∩ ]١ ، ∞ [ = [ ١ ، ٣ ]

(٣) س – ص =] - ∞ ، ٣ [-[ ١ ، ∞ [ = ] - ∞ ، ١ ]

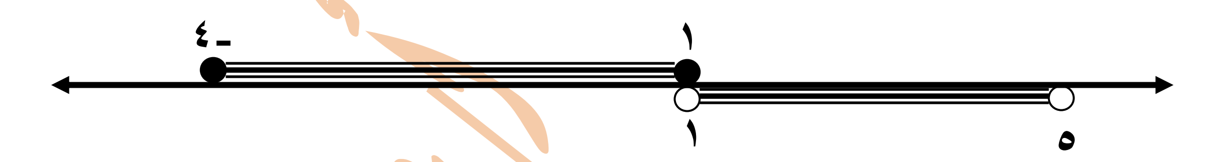
(٤) ص – س = ]١ ، ∞ [ - ] - ∞ ، ٣ [ = ]٣ ، ∞ [

---

مثــ٤ــال : إذا كانت س = [-٤ ، ١ ] ، ص = ]١ ، ٥ [ مثلهما على خط الاعداد ثم أوجد

(١) س ∪ ص  (٢) س ∩ ص  (٣) س – ص  (٤) ص – س

الحــــــل




(١) س ∪ ص = [ - ٤ ، ١ ] ∪ ]١ ، ٥ [ = [ - ٤ ، ٥[

(٢) س ∩ ص = [ - ٤ ، ١ ] ∩ ]١ ، ٥ [ = ϕ

(٣) س – ص =[ - ٤ ، ١ ] - ]١ ، ٥ [ = [ - ٤، ١ ]

(٤) ص – س = ]١ ، ٥[ - [- ٤، ١ ] = ]١ ،٥ [

# تمارين على الفترات

**[ ١ ] اكتب كلا من المجموعات الاتية على صورة فترة ومثلها على خط الاعداد**

(١) أ = { س : س ∈ ح ، -١ < س < ٧ }

(٢) ب = { س : س ∈ ح ، -٣ < س ≤ ٦ }

(٣) ج = { س : س ∈ ح ، ١ ≤ س < ٥ }

(٤) د = { س : س ∈ ح ، -٧ ≤ س ≤ ٤ }

(٥) س = { س : س ∈ ح ، ٢ < س < ٧ }

(٦) ش = { س : س ∈ ح ، س < ٧ }

(٧) ص = { س : س ∈ ح ، س > ٥ }

(٨) م = { س : س ∈ ح ، س ≤ ٧ }

(٩) ن = { س : س ∈ ح ، س ≥ ٢ }

(١٠) هـ = { س : س ∈ ح ، س ≤ -٥ }

(١١) ع = { س : س ∈ ح ، -١ < س }

(١٢) ح+

(١٣) غ = { س : س ∈ ح ، ٣ > س }

(١٤) ح-

(١٥) ف = { س : س ∈ ح ، ١٠ > س > ١ }

(١٦) ق = { س : س ∈ ح ، -١ ≥ س ≥ -٧ }

**[ ٢ ] اكتب بطريقة الصفة المميزة كلا من الفترات الاتية ومثلها على خط الاعداد**

(١) [٢ ، ٦]   (٢) ]٣ ، ٨]   (٣) [-٤ ، ٥]

(٤) ]-١ ، ٦[   (٥) [٣ ، ∞[   (٦) ]-∞ ، ٥[

(٧) ]-٤ ، ∞[   (٨) ]-∞ ، ٩]   (٩) ح+

**[ ٣ ]** إذا كانت س = [-٤ ، ٣] ، ص = [٠ ، ٧] أوجد مستعيناً بخط الاعداد كلا من

(١) س ∪ ص   (٢) س ∩ ص   (٣) س – ص   (٤) ص – س

**[ ٤ ]** إذا كانت س = ]٠ ، ٦] ، ص = [-٥ ، ٣] أوجد مستعيناً بخط الاعداد كلا من

(١) س ∪ ص   (٢) س ∩ ص   (٣) س – ص   (٤) ص – س

**[ ٥ ]** إذا كانت س = [-٤ ، ٩] ، ص = [١ ، ٥[ أوجد مستعيناً بخط الاعداد كلا من

(١) س ∪ ص　　(٢) س ∩ ص　　(٣) س – ص　　(٤) ص – س

[٦] إذا كانت س = ]-٤ ، ∞] ، ص = ] - ∞ ، ٥ ] أوجد مستعيناً بخط الاعداد كلا من

(١) س ∪ ص　　(٢) س ∩ ص　　(٣) س – ص　　(٤) ص – س

[٧] إذا كانت س = ]٥ ، ∞] ، ص = ] - ∞ ، ٢ ] أوجد مستعيناً بخط الاعداد كلا من

(١) س ∪ ص　　(٢) س ∩ ص　　(٣) س – ص　　(٤) ص – س

[٨] إذا كانت س = ]-٤ ، ∞] ، ص = ] - ١ ، ∞ ] أوجد مستعيناً بخط الاعداد كلا من

(١) س ∪ ص　　(٢) س ∩ ص　　(٣) س – ص　　(٤) ص – س

[٩] إذا كانت س = ]٤ ، ∞] ، ص = ] - ٥ ، ٢ ] أوجد مستعيناً بخط الاعداد كلا من

(١) س ∪ ص　　(٢) س ∩ ص　　(٣) س – ص　　(٤) ص – س

---

**[١٠] أوجد مستعينا بخط الأعداد كلا مما ياتى**

(١) ]-٣ ، ٤ ] ∪ ]١ ، ٧ ]

(٢) ]٢ ، ٦ [ ∪ [-١ ، ٣ ]

(٣) ] ١ ، ٥ [ ∩ [-٢ ، ٨ ]

(٤) ] -١ ، ٢ [ ∪ [ ٢ ، ٥ ]

(٥) ]-٣ ، ٤ ] ∩ [ ٤ ، ٧ [

(٦) ] -١ ، ٥ [ ∩ [ ٣ ، ٧ ]

(٧) [٠ ، ٦ ] ∪ ] -٣ ، ٢ [

(٨) [ ١ ، ٣ ] ∩ [ -٤ ، ٧ [

(٩) ح+ — [ -٤ ، ٥ [

(١٠) [ -٣ ، ٤ ] — ح+

(١١) ح- ∪ ] -٥ ، ٣ [

(١٢) ح- ∩ ] -٤ ، ٧ ]

(١٣) ح- — ] -٧ ، ٥ [

(١٤) ] -٣ ، ٤ [ — ح-

(٢٥) ] ٢ ، ∞ ] - ] ٥ ، ∞ ]

(٢٦) ] ٤ ، ∞ ] - [ ٢ ، ∞ ]

# حل متباينة الدرجة الاولى فى متغير واحد

## خواص التباين

لأى ثلاث أعداد حقيقية أ ، ب ، جـ

- إذا كان أ > ب فإن أ + جـ > ب + جـ [ سواء أكانت جـ موجبة أو سالبة ]
- إذا كان أ > ب فإن أ جـ > ب جـ [ إذا كانت جـ > ٠ موجبة ]
- إذا كان أ > ب فإن أ جـ < ب جـ [ إذا كانت جـ < ٠ سالبة ]

---

**مثــ١ــال : أوجد فى ح مجموعة الحل لكلا من المتباينات الاتية وأكتب مجموعة الحل على صورة فترة**

(أ) س – ١ > ٣ (ب) س + ١ ≥ ٣

**الحـــــــل**

(أ) س > ٣ + ١

س > ٤

∴ م.ح = ]٤ ، ∞[

(ب) س ≥ ٣ – ١

س ≥ ٢

∴ م.ح = [٣ ، ∞[

---

**مثــ٢ــال : أوجد فى ح مجموعة الحل لكلا من المتباينات الاتية وأكتب مجموعة الحل على صورة فترة**

(أ) س – ٢ < ٧ (ب) س + ٣ ≤ ٨

**الحـــــــل**

(أ) س < ٧ + ٢

س < ٩

∴ م.ح = ]-∞ ، ٩[

(ب) س ≤ ٨ – ٣

س ≤ ٥

∴ م.ح = ]-∞ ، ٥]

---

**مثــ٣ــال : أوجد فى ح مجموعة الحل لكلا من المتباينات الاتية وأكتب مجموعة الحل على صورة فترة**

(أ) ٥ – ٢ س > ١١ (ب) ١ – ٣ س < ١٣

**الحـــــــل**

(أ) -٢س > ١١ – ٥

(ب) -٣س < ١٣ – ١

-٢س < ٦ بالقسمة ÷ -٢
س > -٣
∴ م.ح = ] - ∞ ، -٣[

- ٣ س > ١٢ بالقسمة ÷ -٣
س > - ٤
∴ م.ح = ] - ∞ ، -٤ [

---

مثـ٤ـال : أوجد فى ح مجموعة الحل لكلا من المتباينات الاتية وأكتب مجموعة الحل على صورة فترة (أ) ٢س +٣ < ١١ (ب) ٣س -٢ > ١٣

الحــــــل

(أ) ٢س < ١١ – ٣
٢س < ٨ بالقسمة ÷٤
س < ٤
∴ م.ح = ] ٤ ، ∞ [

(ب) ٣س > ١٣+٢
٣س > ١٥ بالقسمة ÷٣
س > ٥
∴ م.ح = ] - ∞ ، ٥ [

---

مثـ٥ـال : أوجد فى ح مجموعة الحل لكلا من المتباينات الاتية وأكتب مجموعة الحل على صورة فترة (أ) ٢س – ١ > س +٣ (ب) ٣س +١ < س + ١٣

الحــــل

(أ) ٢س – س > ٣+١
س > ٤
∴ م.ح = ] - ∞ ، ٤ [

(ب) ٣س – س < ١٣ - ١
٢س < ١٢ ÷٢ ⟸ س < ٦
∴ م.ح = ] ٦ ، ∞ [

---

مثـ٦ـال : أوجد فى ح مجموعة الحل لكلا من المتباينات الاتية وأكتب مجموعة الحل على صورة فترة (أ) ٢س – ٣ ⩽ ١٢ – س (ب) ٥س – ١٢ ⩾ س

الحــــل

(أ) ٢س + س ⩽ ١٢ +٣
٣س ⩽ ١٥ ÷٣
س ⩽ ٥
∴ م.ح = ]٥ ، ∞ [

(ب) ٥ س – س ⩾ ١٢
٤س ⩾ ١٢ ÷٤
س ⩾ ٣
∴ م.ح = ] - ∞ ، ٣ ]

**مثـــال ٧ : أوجد فى ح مجموعة الحل لكلا من المتباينات الاتية وأكتب مجموعة الحل على صورة فترة**

(أ) ٥ < س – ١ < ١٠ (ب) ٣ < ٢س +١ ≤ ١١

**الحـــــل**

(أ) ٥+١ < س < ١٠ +١

٦ < س < ١١

∴ م.ح = ] ٦ ، ١١ [

(ب) ٣ – ١ < ٢س ≤ ١١ – ١

٢ < ٢س ≤ ١٠ ÷٢ ⟸ ١ < س ≤ ٥

∴ م.ح = ] ١ ، ٥ ]

---

**مثـــال ٨ : أوجد فى ح مجموعة الحل لكلا من المتباينات الاتية وأكتب مجموعة الحل على صورة فترة**

(أ) ١ < (س+١)/٣ < ٢ (ب) ٣ < س/٢ +١ < ٧

**الحـــــل**

(أ) بالضرب × ٣

٣ < س +١ < ٦

٣ – ١ < س < ٦ – ١

٢ < س < ٥

∴ م.ح = ] ٢ ، ٥ [

(ب) ٣ – ١ < س/٢ < ٧ – ١

٢ < س/٢ < ٦ ×٢

٤ < س < ١٢

∴ م.ح = ] ٤ ، ١٢ [

---

**مثـــال ٩ : أوجد فى ح مجموعة الحل لكلا من المتباينات الاتية وأكتب مجموعة الحل على صورة فترة**

(أ) ٧ ≤ ٣ – ٢ س < ١١ (ب) س +٤ < ٣س +٢ < س +١٠

**الحـــــل**

(أ) ٧ – ٣ ≤ – ٢ س < ١١ – ٣

٤ ≤ – ٢ س < ٨ ÷ -٢

-٢ ≥ س > -٤

∴ م.ح = ح – [ -٤ ، -٢ ]

(ب) بطرح س ٤ < ٢س +٢ < ١٠

٤ – ٢ < ٢س < ١٠ – ٢

٢ < ٢ س < ٨ ÷٢ ⟸ ١ < س < ٤

∴ م.ح = ] ١ ، ٤ [

**مثــ١٠ــال : أوجد فى ح مجموعة الحل لكلا من المتباينات الاتية وأكتب مجموعة الحل على صورة فترة**

**(أ) ٤ – س < ٢س+١ < ١٣ – س          (ب) -٢س+٢ < ٠ < -٢س+١٠**

## الحــــــل

(أ) بأضافة + س للاطراف الثلاثة

٤ < ٣س+١ < ١٣

٤ – ١ < ٣س < ١٣ – ١

٣ < ٣س < ١٢ ÷٣ ⟸ ١ < س < ٤

∴ م.ح = ] ١ ، ٤ [

(ب) بأضافة +٢ س للاطراف الثلاثة

٢ < ٢ س < ١٠      ÷٢

١ < س < ٥

∴ م.ح = ] ١ ، ٥ [

---

## تمارين على المتباينات فى ح

**السؤال الأول : أكمل العبارات الأتية**

(١) إذا كانت ٧ – س > ٣ فإن س < ......................

(٢) إذا كانت س ∈ [ ٣ ، ٥ ] فإن ٢س ∈ ......................

(٣) إذا كانت س ∈ [ ٢ ، ٦ ] فإن س +١ ∈ ........................

(٤) إذا كانت س ∈ [ ٣ ، ٥ ] فإن س$^2$ ∈ ....................

(٥) إذا كانت -٥ < س < ٣ حيث س ∈ ح فإن ٢س ∈ ] ...... ، ....... [

(٦) إذا كانت س ∈ [ -٣ ، ٤ ] فإن س$^2$ ∈ ..............

(٧) إذا كانت س ∈ [ ٤ ، ٩ ] فإن √س ∈ ........................

(٨) إذا كانت س ∈ [ -٢ ، ٣ ] فإن س$^3$ ∈ ......................

(٩) إذا كانت ٢س ∈ [ ٦ ، ١٤ ] فإن س ∈ ......................

(١٠) إذا كانت [-٣ ، ∞ [ هى مجموعة حل المتباينة – س ≤ ب فإن ب = ..........

(١١) إذا كانت ٢س +٣ ∈ [ ٧ ، ١٣ ] فإن س ∈ ......................

**السؤال الثانى : أكتب على صورة فترة مجموعة الحل لكلا من المتباينات الاتية**

(١) ٢س < ١٢

(٢) -٣س < ١٢

(٣) ٣/٢ س > ٦

(٤) س – ١ > ٥

(٥) س +١ ⩾ ٤

(٦) س – ٣ ⩽ ٥

(٧) ٢س – ٣ < ٧

(٨) ٣ س – ٢ > ١٠

(٩) ٥ س + ١ > ٤١

(١٠) ٧ – ٢ س < ٥

(١١) ٣ – ٤ س > ١١

(١٢) ٣ > س +١ ⩾ ١١

(١٣) ٢ ⩾ س – ٣ ⩾ ٥

(١٤) ٣ ⩾ ٢س + ١ > ١١

(١٥) ٥ > ٣س +٢ ⩾ ١٧

(١٦) س +١ > ٢س – ٥ > س +٧

(١٧) س – ١ ⩾ ٣س +٧ ⩾ س + ١٥

(١٨) -٥ > س + ٣ > ٩

(١٩) – س +٥ < ٩

(٢٠) س – ١ > ٣ – س

(٢١) ٢ س – ٣ > ٥ س +٩

(٢٢) ٧ س – ٩ < ٤ س

(٢٣) – س – ١ > س +٢ ⩾ - س +٥

(٢٤) – س > س > ٤ – س

(٢٥) س+٣ < ٢س < س – ٢

(٢٦) س +٣ ⩽ ٢س – ١ ⩽ س – ٣

(٢٧) ٢+٢س > ٣س +٣ > ٥ +٢س

(٢٨) ١ – س ⩾ ١ – ٢ س > ٣ – س

(٢٩) ٣ س – ١ ⩾ ٤ س – ٣ ≥ ٢س+٥

(٣٠) ٣+٢س ⩾ ٣س +٣ > س + ٧

# العمليات على الاعداد الحقيقية

## • خواص عملية الجمع فى ح

(١) خاصية الاغلاق : مجموع أى عددين حقيقيين هو عدد حقيقى

إذا كان أ ∈ ح ، ب ∈ ح فإن أ + ب ∈ ح

(٢) خاصية الإبدال : عملية جمع الأعداد الحقيقية عملية أبدالية

إذا كان أ ∈ ح ، ب ∈ ح فإن أ + ب = ب + أ

(٣) خاصية التجميع ( الدمج ) : لاى ثلاث أعداد حقيقية أ ، ب ، جـ فإن

أ + ب + جـ = ( أ + ب ) + جـ = أ + ( ب + جـ )

(٤) العنصر المحايد الجمعى : الصفر هو العنصر المحايد الجمعى فى ح

لان أ + صفر = صفر + أ = أ

(٥) المعكوس الجمعى : لكل عدد حقيقى أ يوجد معكوس جمعى ( – أ )

أ + ( - أ ) = صفر فمثلاً: العدد ٥ معكوسه الجمعى – ٥

• المعكوس الجمعى للعدد صفر هو صفر

---

## خواص عملية الضرب فى ح

(١) خاصية الاغلاق : حاصل ضرب أى عددين حقيقيين هو عدد حقيقى

إذا كان أ ∈ ح ، ب ∈ ح فإن أ × ب ∈ ح

(٢) خاصية الإبدال : عملية ضرب الأعداد الحقيقية عملية أبدالية

إذا كان أ ∈ ح ، ب ∈ ح فإن أ × ب = ب × أ

(٣) خاصية التجميع ( الدمج ) : لاى ثلاث أعداد حقيقية أ ، ب ، جـ فإن

أ × ب × جـ = (أ × ب ) × جـ = أ × ( ب × جـ )

(٤) العنصر المحايد الضربى : الواحد هو العنصر المحايد الضربى فى ح

لان أ × ١ = ١ × أ = أ

**(٥) المعكوس الضربى :** لكل عدد حقيقى أ يوجد معكوس ضربى هو $\frac{١}{أ}$

$أ \times (\frac{١}{أ}) = ١$ فمثلاً: العدد $\frac{٣}{٥}$ معكوسه الضربى $\frac{٥}{٣}$

**لاحظ أن** المعكوس الضربى للعدد واحد هو واحد ، لايوجد معكوس ضربى للعدد صفر

---

**مثـ١ـال : اختصر لابسط صورة** $٥ + ٢\sqrt{٣} + ٧ + ٤\sqrt{٣}$

**الحـــــــل**

المقدار $= (٥+٧) + (٢\sqrt{٣} + ٤\sqrt{٣}) = ١٢ + ٦\sqrt{٣}$

---

**مثـ٢ـال : اختصر لابسط صورة** $٢\sqrt{٥} + ٣\sqrt{٢} + ٤\sqrt{٥} - ٦\sqrt{٢}$

**الحـــــــل**

المقدار $= (٢\sqrt{٥} + ٤\sqrt{٥}) + (٣\sqrt{٢} - ٦\sqrt{٢}) = ٦\sqrt{٥} - ٣\sqrt{٢}$

---

**مثـ٣ـال : اختصر لابسط صورة** $(\sqrt{٣} + ٢)(٢\sqrt{٣} - ٥)$

**الحـــــــل**

المقدار $= \sqrt{٣}(\sqrt{٣} - ٥) + ٢(٢\sqrt{٣} - ٥)$

$= \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} - \sqrt{٣} \times ٥ + ٢ \times ٢\sqrt{٣} + ٢ \times -٥$

$= ٣ - ٥\sqrt{٣} + ٤\sqrt{٣} - ١٠ = -٧ - \sqrt{٣}$

---

**مثـ٤ـال : أختصر لابسط صورة** $(\sqrt{٣} + \sqrt{٥})^٢$

**الحـــــــل**

المقدار $= (\sqrt{٣})^٢ + ٢ \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٥} + (\sqrt{٥})^٢$

$= ٣ + ٢\sqrt{١٥} + ٥ = ٨ + ٢\sqrt{١٥}$

---

**مثـ٥ـال : أختصر لابسط صورة** $(٣\sqrt{٢} - ٥)^٢ + (٣\sqrt{٥} - ٤)(٣\sqrt{٥} + ٤)$

**الحـــــــل**

المقدار = (٣√٢)$^{٢}$ -٢ × ٣√٢ × ٥ + (-٥)$^{٢}$ + (٣ √٥)$^{٢}$ – (٤)$^{٢}$

= ٩ × ٢ – ٣٠√٢ +٢٥ + ٩ × ٥ – ١٦

= ١٨ – ٣٠√٢ +٢٥ +٤٥ – ١٦ = ٧٢ – ٣٠√٢

---

**مثـال٦ : إذا كان أ= ٣√٥ – ٢ ، ب = ٣√٥ +٢**

**أوجد قيمة أ$^{٢}$ + ٢ أ ب + ب$^{٢}$**

**الحـــل**

المقدار = أ$^{٢}$ + ٢ أ ب + ب$^{٢}$ = ( أ+ب)$^{٢}$

= ( ٣ √٥ – ٢ + ٣√٥+ ٢ )$^{٢}$ = (٦√٥)$^{٢}$= ٣٦ × ٥ = ١٨٠

---

**مثـال٧ : إذا كان أ = ٢√٣ + ٥ ، ب = ٢√٣ - ٥**

**أوجد قيمة المقدار: أ$^{٢}$ – ٢ أب + ب$^{٢}$**

**الحـــل**

المقدار = أ$^{٢}$ – ٢ أ ب+ب$^{٢}$ = ( أ – ب )$^{٢}$

= [( ٢√٣ +٥) – ( ٢√٣ – ٥ )]$^{٢}$

= ( ٢√٣ + ٥ – ٢√٣ + ٥ )$^{٢}$ = ( ١٠)$^{٢}$ = ١٠٠

---

**مثـال٨ : إذا كان أ = √٥ + √٣ ، ب = √٥ - √٣**

**أوجد قيمة القدار أ$^{٢}$ + ب$^{٢}$**

**الحـــل**

أ$^{٢}$ = (√٥ + √٣)$^{٢}$ = (√٥)$^{٢}$ + ٢ × √٥ × √٣ + (√٣)$^{٢}$

= ٥ +٢√١٥ + ٣ = ٨ + ٢√١٥

ب$^{٢}$ = (√٥ – √٣)$^{٢}$ = (√٥)$^{٢}$ – ٢ × √٥ × √٣ + (√٣)$^{٢}$

= ٥ – ٢√١٥ + ٣ = ٨ – ٢√١٥

المقدار =٨ + ٢√١٥ + ٨ – ٢√١٥ = ١٦

**مثـــ٩ـــال : إذا كان م = $٢\sqrt{٥} - ٣$ ، ب = $٢\sqrt{٥} + ٣$**

**أوجد قيمة المقدار م$^{٢}$ + م ب + ب$^{٢}$**

**الحــــــل**

م$^{٢}$ = $(٢\sqrt{٥} - ٣)^{٢} = (٢\sqrt{٥})^{٢} - ٢ \times ٢\sqrt{٥} \times ٣ + (٣)^{٢}$

$= ٤ \times ٥ - ١٢\sqrt{٥} + ٩ = ٢٩ - ١٢\sqrt{٥}$

م ب = $(٢\sqrt{٥} - ٣)(٢\sqrt{٥} + ٣) = (٢\sqrt{٥})^{٢} - (٣)^{٢}$

$= ٤ \times ٥ - ٩ = ٢٠ - ٩ = ١١$

ب$^{٢}$ = $(٢\sqrt{٥} + ٣)^{٢} = (٢\sqrt{٥})^{٢} + ٢ \times ٢\sqrt{٥} \times ٣ + (٣)^{٢}$

$= ٤ \times ٥ + ١٢\sqrt{٥} + ٩ = ٢٩ + ١٢\sqrt{٥}$

∴ المقدار = $٢٩ - ١٢\sqrt{٥} + ١١ + ٢٩ + ١٢\sqrt{٥} = ٦٩$

---

**مثـــ١٠ـــال : إذا كان م = $٣\sqrt{٥} + ٦$ ، ب = $٣\sqrt{٥} - ٦$**

**أوجد قيمة المقدار م$^{٢}$ ــ ب$^{٢}$**

**الحــــــل**

المقدار م$^{٢}$ ــ ب$^{٢}$ = (م + ب)(م ــ ب)

$= [٣\sqrt{٥} + ٦ + ٣\sqrt{٥} - ٦][٣\sqrt{٥} + ٦ - (٣\sqrt{٥} - ٦)]$

$= ٦\sqrt{٥}(٣\sqrt{٥} + ٦ - ٣\sqrt{٥} + ٦) = ٦\sqrt{٥} \times ١٢ = ٧٢\sqrt{٥}$

---

**مثـــ١١ـــال : أكتب كلا من الاعداد الاتية بحيث يكون المقام عدد صحيحا**

(أ) $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$ (ب) $\frac{٦}{\sqrt{٣}}$ (جـ) $\frac{٧}{٥\sqrt{٢}}$

**الحــــــل**

(أ) $\frac{٢}{\sqrt{٥}} = \frac{٢}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{٢\sqrt{٥}}{٥}$

(ب) $\frac{٦}{\sqrt{٣}} = \frac{٦}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٦\sqrt{٣}}{٣} = ٢\sqrt{٣}$

(جـ) $\frac{٧}{٥\sqrt{٢}} = \frac{٧}{٥\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = \frac{٧\sqrt{٢}}{١٠}$

# العمليات على الجذور التربيعية

إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين غير سالبين فإن

❖ $\sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}} = \sqrt{\text{أب}}$ والعكس $\sqrt{\text{أب}} = \sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{ب}}$

فمثلا $\sqrt{٣} \times \sqrt{٢} = \sqrt{٦}$ ، $\sqrt{١٠} = \sqrt{٥} \times \sqrt{٢}$

❖ $\frac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{ب}}} = \sqrt{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}}$ والعكس $\sqrt{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \frac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{ب}}}$

فمثلا $\frac{\sqrt{٦}}{\sqrt{٢}} = \sqrt{\frac{٦}{٢}} = ٣$ وكذلك $\sqrt{\frac{٥}{٣}} = \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٣}}$

❖ $\sqrt{\frac{\text{أ}}{\text{ب}}} = \frac{\sqrt{\text{أ}}}{\sqrt{\text{ب}}} = \frac{\sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{جـ}}}{\sqrt{\text{ب}} \times \sqrt{\text{جـ}}} = \frac{\sqrt{\text{أ جـ}}}{\sqrt{\text{ب جـ}}}$

❖ $\sqrt{\text{أ}} \times \sqrt{\text{أ}} = (\sqrt{\text{أ}})^{٢} = \text{أ}$ فمثلا $\sqrt{٣} \times \sqrt{٣} = ٣$

## خاصية التوزيع ( توزيع الضرب على الجمع )

إذا كان أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية فإن

$\text{أ} \times (\text{ب} + \text{جـ}) = \text{أ} \times \text{ب} + \text{أ} \times \text{جـ}$

فمثلا $\sqrt{٣}\,(\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٣}) = \sqrt{٣} \times \sqrt{٥} + \sqrt{٣} \times ٢\sqrt{٣} = \sqrt{١٥} + ٦$

المعكوس الجمعى للعدد $\frac{٥}{\text{س} - ٢}$ هو $\frac{-٥}{\text{س} - ٢}$ أو $\frac{٥}{٢ - \text{س}}$

المعكوس الضربى للعدد $\frac{\sqrt{٥}}{١٠}$ هو $\frac{١٠}{\sqrt{٥}} = \frac{١٠}{\sqrt{٥}} \times \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٥}} = \frac{١٠\sqrt{٥}}{٥} = ٢\sqrt{٥}$

**مثـ١ــال : ضع كلا مما يأتى على صورة $أ\sqrt{ب}$**

**حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب أصغر قيمة ممكنة**

(١) $\sqrt{١٢}$ (٢) $\sqrt{٤٥}$ (٣) $\sqrt{٤٨}$

(٤) $\sqrt{٥٠}$ (٥) $\sqrt{٢٨}$ (٦) $\sqrt{١٠٠٠}$

**الحـــــــل**

(١) $\sqrt{١٢} = \sqrt{٤ \times ٣} = ٢\sqrt{٣}$

(٢) $\sqrt{٤٥} = \sqrt{٩ \times ٥} = ٣\sqrt{٥}$

(٣) $\sqrt{٤٨} = \sqrt{١٦ \times ٣} = ٤\sqrt{٣}$

(٤) $\sqrt{٥٠} = \sqrt{٢٥ \times ٢} = ٥\sqrt{٢}$

(٥) $\sqrt{٢٨} = \sqrt{٤ \times ٧} = ٢\sqrt{٧}$

(٦) $\sqrt{١٠٠٠} = \sqrt{١٠٠ \times ١٠} = ١٠\sqrt{١٠}$

---

**مثـ٢ــال : ضع كلا مما يأتى على صورة $\sqrt{ب}$ حيث ب عدد صحيح**

(أ) $٢\sqrt{٥}$ (ب) $٤\sqrt{٣}$ (ج) $٣\sqrt{٢}$ (د) $١٠\sqrt{٣}$

**الحـــــــل**

(أ) $٢\sqrt{٥} = \sqrt{٤ \times ٥} = \sqrt{٢٠}$

(ب) $٤\sqrt{٣} = \sqrt{١٦ \times ٣} = \sqrt{٤٨}$

(ج) $٣\sqrt{٢} = \sqrt{٩ \times ٢} = \sqrt{١٨}$

(د) $١٠\sqrt{٧} = \sqrt{١٠٠ \times ٧} = \sqrt{٧٠٠}$

---

**مثـــ٣ــال : ضع كلا مما يأتى على صورة $أ\sqrt{ب}$ حيث ب أصغر صورة ممكنة**

(أ) $\sqrt{٣} \times \sqrt{١٥}$ (ب) $\sqrt{٢} \times \sqrt{٣٢}$ (ج) $\sqrt{٥} \times \sqrt{١٠}$ (د) $٣\sqrt{١٥} \times ٢\sqrt{٣}$

**الحـــــــل**

(أ) $\sqrt{٣} \times \sqrt{١٥} = \sqrt{٣} \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٥} = ٣\sqrt{٥}$

(ب) $\sqrt{٢} \times \sqrt{٣٢} = \sqrt{٢} \times \sqrt{١٦} \times \sqrt{٢} = \sqrt{٢} \times ٤\sqrt{٢} = ٢ \times ٤ = ٨$

(ج) $\sqrt{٥} \times \sqrt{١٠} = \sqrt{٥} \times \sqrt{٥} \times \sqrt{٢} = ٥\sqrt{٢}$

(د) $٣\sqrt{١٥} \times ٢\sqrt{٣} = ٣ \times \sqrt{٣} \times \sqrt{٥} \times ٢ \times \sqrt{٣} = ٣ \times ٢ \times ٣ \times \sqrt{٥} = ١٨\sqrt{٥}$

**مثـــ٤ـــال : أختصر إلى أبسط صورة**

أ) $\sqrt{٥٠} + \sqrt{١٨} - \sqrt{٩٨}$  ب) $٢\sqrt{١٢} + ٣\sqrt{٣} - \sqrt{٧٥}$

**الحـــــــل**

أ) المقدار $= \sqrt{٢٥ \times ٢} + \sqrt{٩ \times ٢} - \sqrt{٤٩ \times ٢}$

$= ٥\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} - ٧\sqrt{٢}$

$= ٨\sqrt{٢} - ٧\sqrt{٢} = \sqrt{٢}$

ب) المقدار $= ٢\sqrt{٤ \times ٣} + ٣\sqrt{٣} - \sqrt{٢٥ \times ٣}$

$= ٢ \times ٢\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٣}$

$= ٤\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٣} - ٥\sqrt{٣} = ٢\sqrt{٣}$

---

**مثـــ٥ـــال : أختصر إلى أبسط صورة**

أ) $\sqrt{٧٥} - \sqrt{١٢} + \sqrt{٢٧}$  ب) $\sqrt{٣٢} - ٣\sqrt{٨} + ٦\sqrt{\frac{١}{٢}}$

**الحـــــــل**

أ) المقدار $= \sqrt{٢٥ \times ٣} - \sqrt{٤ \times ٣} + \sqrt{٩ \times ٣}$

$= ٥\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٣}$

$= ٣\sqrt{٣} + ٣\sqrt{٣} = ٦\sqrt{٣}$

ب) المقدار $= \sqrt{١٦ \times ٢} - ٣\sqrt{٤ \times ٢} + \sqrt{٣٦ \times \frac{١}{٢}}$

$= ٤\sqrt{٢} - ٣ \times ٢\sqrt{٢} + \sqrt{١٨}$

$= ٤\sqrt{٢} - ٦\sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢} = \sqrt{٢}$

---

**مثـــ٦ـــال : أختصر إلى أبسط صورة كلا مما يأتى :** $(\sqrt{٥} - ٢)(\sqrt{٥} + ٤)$

**الحـــــــل**

المقدار $= \sqrt{٥} \times \sqrt{٥} + \sqrt{٥} \times ٤ - ٢ \times \sqrt{٥} - ٢ \times ٤$

$= ٥ + ٤\sqrt{٥} - ٢\sqrt{٥} - ٨ = ٢\sqrt{٥} - ٣$

حل آخر بمجرد النظر   المقدار $= ٥ + ٢\sqrt{٥} - ٨ = ٢\sqrt{٥} - ٣$

---

**مثـــ٧ـــال : أختصر إلى أبسط صورة كلا مما يأتى :** $(\sqrt{٥} + \sqrt{٣})(٢\sqrt{٥} - \sqrt{٣})$

**الحـــــــل**

المقدار $= \sqrt{٥} \times ٢\sqrt{٥} + \sqrt{٥} \times -\sqrt{٣} + \sqrt{٣} \times ٢\sqrt{٥} + \sqrt{٣} \times -\sqrt{٣} = ٧ + \sqrt{١٥}$

بمجرد النظر   المقدار $= ٥ \times ٢ - \sqrt{١٥} + ٢\sqrt{١٥} - ٣ = ٧ + \sqrt{١٥}$

مثــ٨ــال : إذا كان $\text{س} = \sqrt{٥} + \sqrt{٢}$ ، $\text{ص} = ٢\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$

أوجد قيمة المقدار $\text{س}^٢ + ٢\text{س ص} + \text{ص}^٢$ فى أبسط صورة

**الحــــــــل**

المقدار $= (\text{س} + \text{ص})^٢ = (\sqrt{٥} + \sqrt{٢} + ٢\sqrt{٥} - \sqrt{٢})^٢ = (٣\sqrt{٥})^٢ = ٩ \times ٥ = ٤٥$

---

مثــ٩ــال: إذا كان $\text{أ} = \sqrt{٧} + \sqrt{٣}$ ، $\text{ب} = \sqrt{٧} - ٢\sqrt{٣}$

أوجد قيمة المقدار $\text{أ}^٢ - \text{ب}^٢$ فى أبسط صورة

**الحــــــــل**

المقدار $= (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})$

$= [\sqrt{٧} + \sqrt{٣} - \sqrt{٧} + ٢\sqrt{٣}][\sqrt{٧} + \sqrt{٣} + \sqrt{٧} - ٢\sqrt{٣}]$

$= ٣\sqrt{٣} \times (٢\sqrt{٧} - \sqrt{٣}) = ٦\sqrt{٢١} - ٩$

---

مثــ١٠ــال : إذا كان $\text{ل} = ٣\sqrt{٢} - \sqrt{٣}$ ، $\text{م} = \sqrt{٣} - ٢\sqrt{٢}$

أوجد قيمة المقدار $\text{ل}^٢ + \text{م}^٢$

**الحــــــــل**

المقدار $= \text{ل}^٢ + \text{م}^٢ = (٣\sqrt{٢} - \sqrt{٣})^٢ + (\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٢})^٢$

$= (٩ \times ٢ - ٦\sqrt{٦} + ٣) + (٣ - ٤\sqrt{٦} + ٤ \times ٢)$

$= ١٨ - ٦\sqrt{٦} + ٣ + ٣ - ٤\sqrt{٦} + ٨ = ٣٢ - ١٠\sqrt{٦}$

---

# تمارين على الجذور التربيعية

السؤال الأول : أختصر كلا مما يأتى لا بسط صورة

(١) $\sqrt{١٢} + \sqrt{٧٥} - \sqrt{٤٨}$

(٢) $\sqrt{٥٠} - \sqrt{١٨} + \sqrt{٧٢}$

(٣) $\sqrt{٢٠} - \sqrt{٤٥} + \sqrt{٨٠}$

(٤) $\sqrt{٢٨} + \sqrt{٦٣} - \sqrt{١٧٥}$

(٥) $\sqrt{٩٠} - \sqrt{١٦٠} + \sqrt{٤٠}$

(٦) $\sqrt{٢٤} + \sqrt{١٥٠} - \sqrt{٥٤} + \sqrt{٩٦}$

(٧) $4\sqrt{2} - 4\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{18}$

(٨) $2\sqrt{8} + 2\sqrt{12} - \sqrt{48} - \sqrt{2}$

(٩) $\sqrt{27} + \sqrt{12} - \sqrt{48} - 3\sqrt{\frac{1}{3}}$

(١٠) $\sqrt{48} - 2\sqrt{27} + 6\sqrt{\frac{1}{3}}$

(١١) $(5\sqrt{3} - \sqrt{7})(5\sqrt{3} + \sqrt{7})$

(١٢) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$

(١٣) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})(\sqrt{5} + 4\sqrt{3})$

(١٤) $(5\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

(١٥) $(2\sqrt{5} + 4)(3\sqrt{5} - 2)$

(١٦) $(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3})^2$

(١٧) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})$

(١٨) $3\sqrt{2}(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3})$

---

**السؤال الثانى : أجعل المقام فى كلا مما يأتى عدد صحيحاً**

(أ) $\frac{7}{\sqrt{5}}$ (ب) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$ (جـ) $\frac{7}{5\sqrt{2}}$ (د) $\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

(هـ) $\frac{\sqrt{3} + 5}{\sqrt{2}}$ (و) $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ (ز) $\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ (ح) $\frac{1}{\sqrt{3} + 1}$

---

**السؤال الثالث : ضع على صورة $أ\sqrt{ب}$ كلا مما يأتى حيث ب أصغر ما يمكن**

(أ) $\sqrt{18}$ (ب) $\sqrt{12}$ (جـ) $8\sqrt{\frac{1}{2}}$ (د) $\sqrt{80}$ (هـ) $2\sqrt{48}$

---

**السؤال الرابع : ضع على صورة $\sqrt{ب}$ كلا مما يأتى**

(أ) $2\sqrt{5}$ (ب) $3\sqrt{\frac{1}{3}}$ (جـ) $5\sqrt{3}$ (د) $2\sqrt{5} \times \sqrt{3}$ (هـ) $4\sqrt{2}$

# الكميتان المترافقتان

**تعـــــريف**

إذا كان أ، ب عددين نسبيين موجبين فإن كلا من العددين $\sqrt{أ} + ب$ ، $\sqrt{أ} - ب$

يعتبر مرافقاً للعدد الاخر

حاصل ضرب الكميتين المترافقتين = مربع الاول – مربع الثانى

---

**مثـــ١ــال :** أكتب الكسر $\frac{٥}{\sqrt{٧} - \sqrt{٢}}$ بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً

**الحــــــل**

بضرب البسط والمقام فى مرافق المقام $\sqrt{٧} + \sqrt{٢}$

$$\frac{٥}{\sqrt{٧} - \sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٧} + \sqrt{٢}}{\sqrt{٧} + \sqrt{٢}} = \frac{٥(\sqrt{٧} + \sqrt{٢})}{٧ - ٢} = \frac{٥(\sqrt{٧} + \sqrt{٢})}{٥} = \sqrt{٧} + \sqrt{٢}$$

---

**مثـــ٢ــال :** إذا كان س = $\frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، ص = $\sqrt{٧} - \sqrt{٣}$

إثبت أن س ، ص كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار $س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢}$

**الحــــــل**

$$س = \frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}}{\sqrt{٧} + \sqrt{٣}} = \frac{٤(\sqrt{٧} + \sqrt{٣})}{٧ - ٣} = \frac{٤(\sqrt{٧} + \sqrt{٣})}{٤} = \sqrt{٧} + \sqrt{٣}$$

المقدار $س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} = (س + ص)^{٢}$

$$= (\sqrt{٧} + \sqrt{٣} + \sqrt{٧} - \sqrt{٣})^{٢} = (٢\sqrt{٧})^{٢} = ٤ \times ٧ = ٢٨$$

---

**مثـــ٣ــال :** إذا كان س = $\frac{٣}{\sqrt{٥} + \sqrt{٢}}$ ، ص = $\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$

إثبت أن س ، ص كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار $س^{٢}$ $ص^{٢}$

**الحــــــل**

$$س = \frac{٣}{\sqrt{٥} + \sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}}{\sqrt{٥} - \sqrt{٢}} = \frac{٣(\sqrt{٥} - \sqrt{٢})}{٥ - ٢} = \frac{٣(\sqrt{٥} - \sqrt{٢})}{٣} = \sqrt{٥} - \sqrt{٢}$$

المقدار = س$^{٢}$ ص$^{٢}$ = ( س ص )$^{٢}$

$= [(\sqrt{٥} + \sqrt{٢})(\sqrt{٥} - \sqrt{٢})]^{٢} = (٥ - ٢)^{٢} = (٣)^{٢} = ٩$

---

**مثـــ٤ـــال : إذا كان س = ٥ ـ ٢$\sqrt{٦}$ ، ص = $\frac{١}{س}$**

**إثبت أن س ، ص كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار ص$^{٢}$ ـ ٢ س ص + س$^{٢}$**

**الحـــــل**

$ص = \frac{١}{س} = \frac{١}{٥ - ٢\sqrt{٦}} \times \frac{٥ + ٢\sqrt{٦}}{٥ + ٢\sqrt{٦}} = \frac{٥ + ٢\sqrt{٦}}{٢٥ - ٤ \times ٦} = ٥ + ٢\sqrt{٦}$

المقدار ص$^{٢}$ ـ ٢ س ص + س$^{٢}$ = ( ص ـ س )$^{٢}$

$= (٥ + ٢\sqrt{٦} - ٥ + ٢\sqrt{٦})^{٢} = (٤\sqrt{٦})^{٢} = ١٦ \times ٦ = ٩٦$

---

**مثـــ٥ـــال : إذا كانت س = $\frac{٣}{٢\sqrt{٢} - \sqrt{٥}}$ ،، ص = ٢$\sqrt{٢}$ + $\sqrt{٥}$**

**إثبت أن س ، ص كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار $\frac{س + ص}{س ص}$**

**الحـــــل**

$س = \frac{٣}{٢\sqrt{٢} - \sqrt{٥}} \times \frac{٢\sqrt{٢} + \sqrt{٥}}{٢\sqrt{٢} + \sqrt{٥}} = \frac{٣(٢\sqrt{٢} + \sqrt{٥})}{٤ \times ٢ - ٥}$

$= \frac{٣(٢\sqrt{٢} + \sqrt{٥})}{٣} = ٢\sqrt{٢} + \sqrt{٥}$

$س + ص = ٢\sqrt{٢} + \sqrt{٥} + ٢\sqrt{٢} - \sqrt{٥} = ٤\sqrt{٢}$

$س ص = (٢\sqrt{٢} + \sqrt{٥})(٢\sqrt{٢} - \sqrt{٥}) = ٤ \times ٢ - ٥ = ٨ - ٥ = ٣$

المقدار = $\frac{س + ص}{س ص} = \frac{٤\sqrt{٢}}{٣}$

---

**مثـــ٦ـــال :** إذا كان $س = \frac{3}{\sqrt{7}-2}$ ، $ص = \sqrt{7} - 2$

إثبت أن س ، ص كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار $س^2 + س ص + ص^2$

## الحــــل

$$س = \frac{3}{\sqrt{7}-2} \times \frac{\sqrt{7}+2}{\sqrt{7}+2} = \frac{3(\sqrt{7}+2)}{7-4}$$

$$= \frac{3(\sqrt{7}+2)}{3} = \sqrt{7}+2$$

$$س^2 = (\sqrt{7}+2)^2 = 7 + 4\sqrt{7} + 4 = 11 + 4\sqrt{7}$$

$$س ص = (\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-2) = 7 - 4 = 3$$

$$ص^2 = (\sqrt{7}-2)^2 = 7 - 4\sqrt{7} + 4 = 11 - 4\sqrt{7}$$

$$المقدار = 11 + 4\sqrt{7} + 3 + 11 - 4\sqrt{7} = 25$$

---

# تمارين على الكميتان المترافقتان

**السؤال الأول : ضع كلا من الكسور الاتية بحيث يكون المقام عدد صحيحاً**

(أ) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ (ب) $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ (ج) $\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ (د) $\frac{2}{\sqrt{5}+2}$

[ ٢ ] إذا كانت $أ = \frac{2}{3-\sqrt{7}}$ ، $ب = 3 - \sqrt{7}$

إثبت أن أ ، ب كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار $أ^2 + 2 أ ب + ب^2$

[ ٣ ] إذا كانت $أ = 2 + \sqrt{3}$ ، $ب = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$

إثبت أن أ ، ب كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار $أ^2 - 2 أ ب + ب^2$

[ ٤ ] إذا كانت $أ = \frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ ، $ب = \sqrt{7} - \sqrt{5}$

إثبت أن أ ، ب كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار $أ^2 + أ ب + ب^2$

[ ٥ ] إذا كانت أ = $\sqrt{٢} - ١$ ، ب = $\frac{١}{\sqrt{٢} - ١}$

إثبت أن أ ، ب كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار أ$^{٢}$ – أ ب + ب$^{٢}$

[ ٦ ] إذا كانت س = $\frac{٢}{\sqrt{١١} + ٣}$ ، ص = $\sqrt{١١} + ٣$

إثبت أن س ، ص كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار س$^{٢}$ + ص$^{٢}$

[ ٧ ] إذا كانت ب = $\sqrt{١٠} - ٣$ ، جـ = $\frac{١}{\sqrt{١٠} - ٣}$

إثبت أن ب ، جـ كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار ب$^{٢}$ – جـ$^{٢}$

[ ٨ ] إذا كانت أ = $\frac{١}{\sqrt{٣} + \sqrt{٢}}$ ، ب = $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$

إثبت أن أ ، ب كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار أ$^{٢}$ ب$^{٢}$

[ ٩ ] إذا كانت أ = $\sqrt{٥} + \sqrt{٣}$ ،، ب = $\frac{٢}{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}$

إثبت أن أ ، ب كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار (أ + ب )$^{٢}$

[١٠] إذا كانت أ = $\frac{٤}{\sqrt{٥} - ١}$ ، ب = $\sqrt{٥} - ١$

إثبت أن أ ، ب كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار $\frac{\text{أ + ب}}{\text{أ ب}}$

[ ١١ ] إذا كانت أ = $\frac{١}{\sqrt{٥} - ٢}$ ، ب = $\frac{٢٠}{\sqrt{٥}}$ أوجد قيمة المقدار أ$^{٢}$ – ب

[ ١٢ ] إذا كانت س = $\sqrt{٣} - \sqrt{٢}$ ، أوجد قيمة المقدار ( س + س$^{-١}$ )$^{٢}$

[ ١٣] إذا كانت أ = $\sqrt{٥} - \sqrt{٣}$ ،، ب = $\frac{٢}{\text{أ}}$

إثبت أن أ ، ب كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار أ ب$^{٣}$

[ ١٤] إذا كانت أ = $\frac{٢}{\sqrt{٥} - \sqrt{٣}}$ ، ب = $\frac{٢}{\sqrt{٥} + \sqrt{٣}}$ ،

إثبت أن س ، ص كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار أ$^{٢}$ + ب$^{٢}$ – ٢ أ ب

[١٥] إذا كانت س = $\frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$ ، $ص^{-١}$ = $\frac{١}{\sqrt{٧} - \sqrt{٣}}$

إثبت أن س ، ص كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار $س^٢ + ص^٢$

[١٦] إذا كانت س = $\frac{٢}{\sqrt{٣} - ١}$ ، ص = $\frac{٣ - \sqrt{٣}}{\sqrt{٣}}$ ،

إثبت أن س ، ص كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار $\frac{س + ص}{س ص}$

[١٧] إذا كانت س = $\sqrt{٣} + \sqrt{٢}$ ،، ص = $\sqrt{٣} - \sqrt{٢}$

إثبت أن س ، ص كلا منهما معكوس ضربى للاخر ثم أوجد $( س - ص )^٢$

[١٨] إذا كانت س = $\frac{\sqrt{٢} - ١}{\sqrt{٣} - ٨}$ ، ص = $\frac{١}{\sqrt{٢} - ١}$

إثبت أن س ، ص كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار ٢ س ص

[١٩] إذا كانت س = $\sqrt{٥} - \sqrt{٣}$ ،، س ص = ٢

إثبت أن س ، ص كميتان مترافقتان ثم أوجد قيمة المقدار $ص^٢ - س^٢$

[ ٢٠ ] أكمل العبارات الاتية

(١) $( ٣ - \sqrt{٧} )^٥ ( ٣ + \sqrt{٧} )^٥$ = ..................

(٢) المعين الذى طولا قطريه $(٢\sqrt{٥} + \sqrt{٢})$ ، $(٢\sqrt{٥} - \sqrt{٢})$ من وحدات الطول

فإن مساحته ............ وحدة مربعة

(٣) إذا كانت س = $٢ - \sqrt{٣}$ ، ص = $س^{-١}$ فإن س + ص = .............

(٤) إذا كانت $س^٢ = \frac{\sqrt{٥} + ٢}{\sqrt{٥} - ٢}$ فإن قيمة س الموجبة = ............

(٥) $(\sqrt{٢} + \sqrt{٣})^{-٩} (\sqrt{٢} - \sqrt{٣})^{-٩}$ = .............

(٦) $(\sqrt{١١} - \sqrt{١٠})^٤ (\sqrt{١١} + \sqrt{١٠})^٣$ = ................

# العمليات على الجذور التكعيبية

♣ إذا كان أ ، ب عددين حقيقيين فإن

(١) $\sqrt[3]{أ} \times \sqrt[3]{ب} = \sqrt[3]{أب}$ فمثلا $\sqrt[3]{٢} \times \sqrt[3]{٣} = \sqrt[3]{٦}$

(٢) $\frac{\sqrt[3]{أ}}{\sqrt[3]{ب}} = \sqrt[3]{\frac{أ}{ب}}$ فمثلا $\frac{\sqrt[3]{٤}}{\sqrt[3]{٥}} = \sqrt[3]{\frac{٤}{٥}}$

(٣) $\sqrt[3]{-أ} = -\sqrt[3]{أ}$ فمثلا $\sqrt[3]{-٨} = -\sqrt[3]{٨} = -٢$

(٤) $\sqrt[3]{أ} \times \sqrt[3]{أ} \times \sqrt[3]{أ} = أ$ فمثلا $\sqrt[3]{٥} \times \sqrt[3]{٥} \times \sqrt[3]{٥} = ٥$

---

**مثـــ١ـــال : أختصر إلى أبسط صورة**

(أ) $\sqrt[3]{٤٠} + \sqrt[3]{١٣٥} - \sqrt[3]{٣٢٠}$  (ب) $٢\sqrt[3]{٥٤} + ٣\sqrt[3]{١٦} - \sqrt[3]{٢٥٠}$

**الحـــــــل**

(أ) $\sqrt[3]{٨\times٥} + \sqrt[3]{٢٧\times٥} - \sqrt[3]{٦٤\times٥}$

$= ٢\sqrt[3]{٥} + ٣\sqrt[3]{٥} - ٤\sqrt[3]{٥}$

$= ٥\sqrt[3]{٥} - ٤\sqrt[3]{٥} = \sqrt[3]{٥}$

(ب) $٢\sqrt[3]{٢٧\times٢} + ٣\sqrt[3]{٨\times٢} - \sqrt[3]{١٢٥\times٢}$

$= ٢\times٣\sqrt[3]{٢} + ٣\times٢\sqrt[3]{٢} - ٥\sqrt[3]{٢}$

$= ٦\sqrt[3]{٢} + ٦\sqrt[3]{٢} - ٥\sqrt[3]{٢} = ٧\sqrt[3]{٢}$

---

**مثـــ٢ـــال : أختصر إلى أبسط صورة**

(أ) $\sqrt[3]{٣٧٥} - \sqrt[3]{٢٤} + \sqrt[3]{٨١}$  (ب) $\sqrt[3]{٥٤} - \sqrt[3]{-٢٥٠} + ٤\sqrt[3]{\frac{١}{٤}}$

**الحـــــــل**

(أ) $\sqrt[3]{١٢٥\times٣} - \sqrt[3]{٨\times٣} + \sqrt[3]{٢٧\times٣}$

$= ٥\sqrt[3]{٣} - ٢\sqrt[3]{٣} + ٣\sqrt[3]{٣}$

$= ٨\sqrt[3]{٣} - ٢\sqrt[3]{٣} = ٦\sqrt[3]{٣}$

(ب) $\sqrt[3]{٢٧\times٢} - \sqrt[3]{-١٢٥\times٢} + \sqrt[3]{٦٤\times\frac{١}{٤}}$

$= ٣\sqrt[3]{٢} - (-٥)\sqrt[3]{٢} + ٢\sqrt[3]{٢}$

$= ٣\sqrt[3]{٢} + ٥\sqrt[3]{٢} + ٢\sqrt[3]{٢} = ١٠\sqrt[3]{٢}$

**مثـــ٣ـــال : أوجد** $\sqrt[٣]{٣٢} + ٢\sqrt[٣]{\frac{١}{٢}} - \sqrt[٣]{(-٢)^{٢}}$ **فى أبسط صورة**

**الحـــل**

المقدار $= \sqrt[٣]{٨ \times ٤} + \sqrt[٣]{\frac{٨}{٢}} - \sqrt[٣]{٤}$

$= ٢\sqrt[٣]{٤} + \sqrt[٣]{٤} - \sqrt[٣]{٤} = ٢\sqrt[٣]{٤}$

---

**مثـــ٤ـــال : أوجد فى أبسط صورة** $(\sqrt[٣]{٣} - \sqrt[٣]{٢})(\sqrt[٣]{٩} + \sqrt[٣]{٦} + \sqrt[٣]{٤})$

**الحـــل**

تذكر أن $(س - ص)(س^{٢} + س\,ص + ص^{٢}) = س^{٣} - ص^{٣}$

$(س + ص)(س^{٢} - س\,ص + ص^{٢}) = س^{٣} + ص^{٣}$

المقدار $= (\sqrt[٣]{٣})^{٣} - (\sqrt[٣]{٢})^{٣} = \sqrt[٣]{٢٧} - \sqrt[٣]{٨} = ٣ - ٢ = ١$

---

## تمارين على الجذور التكعيبية

**السؤال الأول أوجد كلا مما يأتى فى أبسط صورة :-**

أ) $\sqrt[٣]{١٦}$ ب) $\sqrt[٣]{-٥٤}$ حـ) $٢\sqrt[٣]{٢٥٠}$

ء) $\sqrt[٣]{-١٣٥}$ هـ) $٣\sqrt[٣]{\frac{١}{٣}}$ و) $\frac{٢}{٣}\sqrt[٣]{-١٠}$

---

**السؤال الثانى أختصر كلا مما يأتى إلى أبسط صورة**

(١) $\sqrt[٣]{٨١} + \sqrt[٣]{-٢٤} - ٣\sqrt[٣]{\frac{١}{٩}}$ (٢) $\sqrt[٣]{١٦} - \sqrt[٣]{٥٤} + \sqrt[٣]{-٢}$

(٣) $٢\sqrt[٣]{٣} - \sqrt[٣]{٨١} + \sqrt[٣]{٢٤}$ (٤) $\sqrt[٣]{٥٤} + \sqrt[٣]{-٢} - \sqrt[٣]{١٦}$

(٥) $\sqrt[٣]{٥٤} + \sqrt[٣]{١٦} - \sqrt[٣]{٢٥٠}$ (٦) $٢\sqrt[٣]{٥٤} - ٥\sqrt[٣]{٢} + \sqrt[٣]{١٦}$

(٧) $\sqrt[٣]{١٦} + \sqrt[٣]{٥٤} + ٣\sqrt[٣]{-١٢٨} - ٦\sqrt[٣]{\frac{١}{٤}}$ (٨) $\sqrt[٣]{٣} + \sqrt[٣]{-٥٤} + ٨\sqrt[٣]{\frac{١}{٤}}$

# تطبيقات على الجذور التربيعية والتكعيبية

## أولا . الدائرة

محيط الدائرة = ٢ $\pi$ نق ،،،، مساحة الدائرة = $\pi$ نق$^{٢}$

حيث نق هو نصف قطر الدائرة ، $\pi = \frac{٢٢}{٧}$ أ، ٣٫١٤ مالم يذكر خلاف ذلك

---

**مثـــ١ـــال :** دائرة مساحتها ١٥٤ سم$^{٢}$ أوجد محيطها لاقرب سم ( $\pi = \frac{٢٢}{٧}$ )

**الحـــــــل**

مساحتها = $\pi$ نق$^{٢}$ = ١٥٤ $\Longleftarrow$ $\frac{٢٢}{٧}$ نق$^{٢}$ = ١٥٤ $\Longleftarrow$ نق$^{٢}$ = ١٥٤ × $\frac{٢٢}{٧}$

$\therefore$ نق$^{٢}$ = ٤٩ $\therefore$ نق = $\sqrt{٤٩}$ = ٧سم

$\therefore$ محيط الدائرة = ٢ $\pi$ نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ = ٤٤ سم

---

**مثـــ٢ـــال :** دائرة مساحتها ٣٦ $\pi$ أوجد طول نصف قطرها ثم أوجد محيطها

**الحـــــــل**

مساحة الدائرة = $\pi$ نق$^{٢}$ = ٣٦ $\pi$

نق$^{٢}$ = ٣٦ $\Longleftarrow$ نق = $\sqrt{٣٦}$ = ٦سم

محيطها = ٢ ط نق = ٢ $\pi$ × ٦ = ١٢ $\pi$

### تمارين على الدائرة

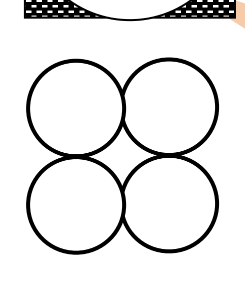
(١) دائرة طول نصف قطرها = ٢١سم أوجد محيطها ومساحتها

(٢) دائرة طول نصف قطرها = $\sqrt{٧}$ أوجد مساحتها

(٣) أوجد طول نصف قطر الدائرة التى محيطها يساوى مساحتها

(٤) فى الشكل المقابل مربع طول ضلعه = ١٤سم

والدائرة تمس أضلاعه من الداخل أوجد مساحة المنطقة المظلله



(٥) أربعة دوائر متطابقة ومتماسة طول نصف قطر كلا منها = نق

إثبت أن مساحة المنطقة المظللة = نق$^{٢}$ ( ٤ − $\pi$ )

## ثانيا : متوازى المستطيلات

متوازى المستطيلات :- هو جسم جميع أوجهه الستة مستطيلة الشكل وكل وجهين متقابلين متطابقين

ع، س، ص

إذا كانت أبعاده س ، ص ، ع فإن

مساحته الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ ( س + ص ) × ع

مساحته الكلية = ٢ ( س ص + ص ع + س ع )

حجمه = مساحة القاعدة × الارتفاع = س ص ع

---

**مثـــ٣ـــال : متوازى مستطيلات أبعاده ٣ ، ٤ ، ٦سم أوجد**

**(١) مساحته الكلية (٢) حجمه**

**الحـــــــل**

مساحته الكلية = ٢ ( س ص + ص ع + س ع ) = ٢ [ ٣ × ٤ + ٤ × ٦ + ٣ × ٦ ]

= ٢ [ ١٢ + ٢٤ + ١٨ ] = ٢ × ٥٤ = ١٠٨ سم$^{٢}$

حجمه = س ص ع = ٣ × ٤ × ٦ = ٨٤ سم$^{٣}$

---

**مثـــ٤ـــال : متوازى مستطيلات النسبة بين أبعاده ٢ : ٣ : ٥**

**فإذا كان حجمه ٣٠٠٠٠ سم$^{٣}$ أوجد مساحته الكلية**

**الحـــــل**

نفرض أبعاده هى ٢س، ٣س، ٥س

حجمه = ٢س × ٣س × ٥س = ٣٠٠٠٠

٣٠س$^{٣}$ = ٣٠٠٠٠ ⟸ س$^{٣}$ = $\frac{٣٠٠٠٠}{٣٠}$ = ١٠٠٠

∴ س = $\sqrt[٣]{١٠٠٠}$ = ١٠ سم ∴ أبعاده هى ٢٠ سم ، ٣٠سم ، ٥٠سم

مساحته الكلية = ٢(٢٠×٣٠ + ٣٠×٥٠ + ٢٠×٥٠)

= ٢ ( ٦٠٠ + ١٥٠٠ + ١٠٠٠) = ٢ × ٣١٠٠ = ٦٢٠٠ سم$^{٢}$

**مثـــال : مكعب من الصلصال طول حرفه = ٢٠سم صنعت منه متوازيات مستطيلات صغيرة أبعاد كلا منها ٢سم ، ٤سم ، ٥ سم أوجد عدد متوازيات المستطيلات**

**الحـــــــل**

حجم الصلصال = ٢٠ × ٢٠ × ٢٠ = ٨٠٠٠ سم$^{٣}$

حجم متوازى المستطيلات = ٢ × ٤ × ٥ = ٤٠ سم$^{٣}$

عدد متوازيات المستطيلات = $\frac{\text{حجم الصلصال}}{\text{حجم متوازى المستطيلات}}$

= $\frac{٨٠٠٠}{٤٠}$ = ٢٠٠ متوازى مستطيلات

---

## تمارين على متوازى المستطيلات

(١) متوازى مستطيلات أبعاده ٤ سم ، ٦سم ، ٥سم أوجد

(أ) مساحته الكلية (ب) حجمه

(٢) متوازى مستطيلات بعدا قاعدته ٤سم ، ٥سم وارتفاعه = ٦سم أوجد

(أ) مساحته الجانبية (ب) مساحته الكلية (جـ) حجمه

(٣) متوازى مستطيلات النسبة بين أبعاده ٢ : ٣ : ٤ وحجمه = ٣٠٠٠

أوجد مساحته الكلية

(٤) متوازى مستطيلات مساحته الجانبية = ٤٨٠ سم$^{٢}$ وقاعدته على شكل مربع طول ضلعه = ١٠ سم أحسب أرتفاعه

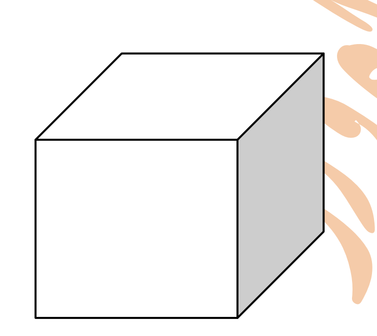
(٥) متوازى مستطيلات قاعدته مربع طول ضلعه = ٥سم وأرتفاعه = ٦سم أوجد

(أ) مساحته الجانبية (ب) مساحته الكلية (جـ) حجمه

---

## ثالثا المكعب

المكعب حالة خاصة من متوازى المستطيلات فهو متوازى أضلاع أبعاده متساوية فى الطول



مساحته الجانبية = ٤ ل$^{٢}$ مساحته الكلية = ٦ ل$^{٢}$

حجمه = ل$^{٣}$

**مثـــــ٦ـــال : مكعب طول حرفه ١٠ سم أوجد**

**(١) مساحته الجانبية (٢) مساحته الكلية (٣) حجمه**

**الحــــــل**

مساحته الجانبية = $٤ ل^{٢} = ٤ (١٠)^{٢} = ٤ \times ١٠٠ = ٤٠٠$ سم$^{٢}$

مساحته الكلية = $٦ ل^{٢} = ٦ (١٠)^{٢} = ٦ \times ١٠٠ = ٦٠٠$ سم$^{٢}$

حجمه = $ل^{٣} = (١٠)^{٣} = ١٠٠٠$ سم$^{٣}$

---

**مثـــــ٧ـــال : مكعب مساحته الجانبية ١٠٠سم$^{٢}$ أوجد مساحته الكلية وحجمه**

**الحــــــل**

مساحته الجانبية = $٤ ل^{٢} = ١٠٠$

$\therefore ل^{٢} = ٢٥ \Leftarrow ل = \sqrt{٢٥} = ٥$سم

مساحته الكلية = $٦ ل^{٢} = ٦(٥)^{٢} = ٦ \times ٢٥ = ١٥٠$سم$^{٢}$

حجمه = $ل^{٣} = (٥)^{٣} = ١٢٥$ سم$^{٣}$

---

**مثـــــ٨ـــال : مكعب مساحته الكلية ٦٠٠سم$^{٢}$ أوجد مساحته الجانبية وحجمه**

**الحــــــل**

مساحة المكعب الكلية = $٦ ل^{٢} = ٦٠٠$

$\therefore ل^{٢} = ١٠٠ \Leftarrow ل = \sqrt{١٠٠} = ١٠$سم

مساحة المكعب الجانبية = $٤ ل^{٢} = ٤(١٠)^{٢} = ٤\times١٠٠ = ٤٠٠$سم$^{٢}$

حجم المكعب = $ل^{٣} = (١٠)^{٣} = ١٠٠٠$ سم$^{٣}$

---

**مثـــــ٩ـــال : مكعب حجمه ٢١٦ سم$^{٣}$ أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية**

**الحــــــل**

حجم المكعب = $ل^{٣} = ٢١٦ \Leftarrow \therefore ل = \sqrt[٣]{٢١٦} = ٦$سم

مساحته الجانبية = $٤ ل^{٢} = ٤(٦)^{٢} = ٤\times٣٦ = ١٤٤$سم$^{٢}$

مساحته الكلية = $٦ ل^{٢} = ٦(٦)^{٢} = ٦\times ٣٦ = ٢١٦$

---

## تمارين على المكعب

### [١] أكمل العبارات الاتية

(١) المساحة الجانبية لمكعب طول حرفه ل سم = ............... سم$^{2}$

(٢) إذا كان طول حرف مكعب ٢سم فإن حجمه = ........... سم$^{3}$

(٣) المكعب الذى طول حرفه ٢ل سم فإن حجمه = ........... سم$^{3}$

(٤) مكعب طول حرفه = ٤سم فإن مساحته الكلية = ........... سم$^{2}$

(٥) المكعب الذى حجمه = ١٠٠٠ سم$^{3}$ مساحة سطحه الجانبى = .........سم$^{2}$

(٦) إذا كانت مساحة الاوجه الستة لمكعب = ١٥٠سم$^{2}$ فإن حجمه = .......... سم$^{3}$

(٧) مكعب حجمه = ٥سم$^{3}$ إذا ضُوعف طول حرفه فإن حجمه = ......... سم$^{3}$

### [ ٢ ] أختار الأجابة الصحيحة من بين الأقواس

(١) مكعب طول حرفه = ٦سم أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه

[١٤٤سم$^{2}$ ، ٢١٦ سم$^{2}$ ، ٢١٦سم$^{3}$ ]

(٢) مكعب حجمه = ١٢٥ سم$^{3}$ أوجد طول حرفه ، مساحته الجابية ومساحته الكلية

[ ٥سم ، ١٠٠ سم$^{2}$ ، ١٥٠ سم$^{2}$ ]

(٣) مكعب مساحة أحد أوجهه = ١٠٠سم$^{2}$ أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه

[ ٤٠٠سم$^{2}$ ، ٦٠٠سم$^{2}$ ، ١٠٠٠سم$^{3}$]

(٤) مكعب محيط أحد أوجهه = ١٢سم أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه

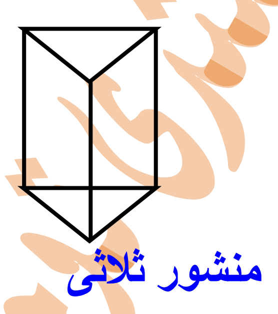
[٣٦سم$^{2}$ ، ٥٤سم$^{2}$ ، ٢٧سم$^{3}$ ]

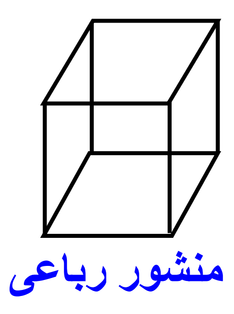
(٥) مكعب مجموع أطوال جميع أحرفه = ٤٨ سم أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه

[ ٦٤سم$^{2}$ ، ٩٦سم$^{2}$ ، ٦٤سم$^{3}$]

## رابعاً : المنشور القائم

**المنشور هو جسم جميع أوجهه الجانبية مستطيلة الشكل وقاعدتاه متطابقتان ومتوازيتان وكلا منهما مضلع ( مثلث – شكل رباعى – شكل خماسى )**


منشور ثلاثى


منشور رباعى


منشور خماسى

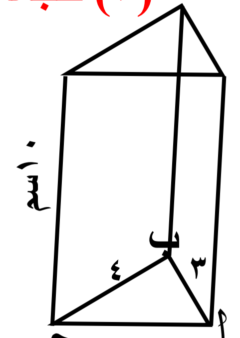
**المساحة الجانبية للمنشور = محيط القاعدة × الارتفاع**

**المساحة الكلية للمنشور = المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين**

**حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع**

---

**مثـــ١٠ــال : منشور ثلاثى قاعدته مثلث قائم الزاوية طولا ضلعى القائمة فيه ٣سم ، ٤سم وأرتفاعه ١٠سم أوجد (١) مساحته الجانبية (٢) مساحته الكلية (٣) حجمه**




### الحـــــل

(أ جـ)$^2$ = ١٦ + ٩ = ٢٥سم ∴ أ جـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥سم

محيط القاعدة = ٣+٤+٥=١٢سم

مساحة القاعدة = $\frac{1}{2}$ × ٣ × ٤ = ٦ سم$^2$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع = ١٢ × ١٠ = ١٢٠ سم$^2$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين

= ١٢٠ + ٢ × ٦ = ١٣٢ سم$^2$

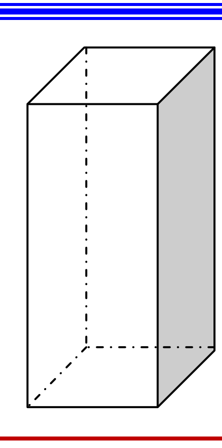
حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع = ٦ × ١٠ = ٦٠سم$^3$

---

**مثـــ١١ــال : منشور قاعدته مربع طول ضلعه = ٣سم وأرتفاعه = ٧سم أوجد**

**(١) مساحته الجانبية (٢) مساحته الكلية (٣) حجمه**

### الحـــــل



المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

= ١٢ × ٧= ٨٤ سم$^{٢}$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين

= ٨٤ + ٢ × ٩ = ١٠٢ سم$^{٢}$

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع = ٩ × ٧ = ٦٣سم$^{٣}$

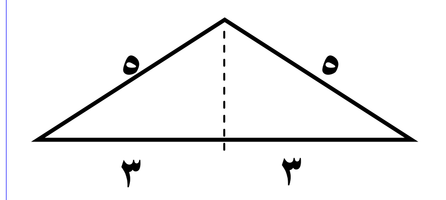
---

**مثــــ١٢ــال : منشور ثلاثى قائم قاعدته على شكل مثلث متساوى الساقين طول كلا من ساقيه ٥سم وطول قاعدته ٦سم فإذا كان حجم المنشور ٨٤ سم$^{٢}$ أوجد**

**(١) أرتفاع المنشور (٢) مساحته الجانبية (٣) مساحته الكلية**

## الحـــــل

نوجد أرتفاع القاعدة ( العمود النازل من الرأس على القاعدة ينصفها)




الارتفاع = $\sqrt{٢٥ - ٩}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤ سم

مساحة القاعدة = $\frac{١}{٢}$ × ٣ × ٤ = ٦سم$^{٢}$

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع = ٨٤

٦ × أرتفاع المنشور = ٨٤ ⟸ أرتفاع المنشور = $\frac{٨٤}{٦}$ = ١٤ سم

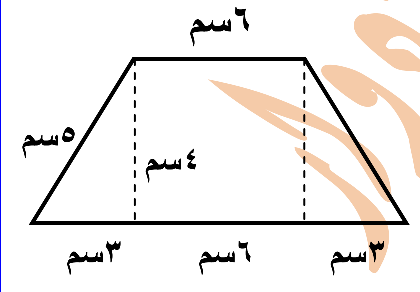
مساحته الجانبية = محيط القاعدة × الإرتفاع= ١٦ × ١٤ = ٢٢٤ سم$^{٢}$

مساحته الكلية = المساحة الجانبية + ٢ × القاعدة =٢٢٤+ ٢×٦=٢٢٤+١٢=٢٣٦

---

**مثــــ١٣ــال : منشور رباعى قائم أرتفاعه ١٥سم وقاعدته شبه منحرف متطابق الساقين طولا قاعدتيه المتوازيتين ٦سم ، ١٢ سم وطول ساقيه = ٥سم**

**أوجد مساحته الجانبية والكلية وحجمه**




## الحـــــل

محيط القاعدة = ٦ + ١٢ + ٥ + ٥ = ٢٨ سم

مساحة القاعدة= $\frac{١}{٢}$ × (٦ + ١٢) × ٤ = ٣٦ سم$^{٢}$

حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع = ٣٦ × ١٥ = ٥٤٠ سم$^{٣}$

مساحته الجانبية = محيط القاعدة × الإرتفاع= ٢٨ × ١٥ = ٤٢٠ سم$^{٢}$

مساحته الكلية = المساحة الجانبية + ٢× مساحة القاعدة

=٤٢٠ + ٢×٥٤٠ =٤٢٠ + ١٠٨٠ = ١٥٠٠ سم$^{٢}$

---

## تمارين على المنشور

(١) منشور ثلاثى قائم أرتفاعه ١٢سم وقاعدته على شكل مثلث قائم الزاوية طولا ضلعى القائمة فيه ٣سم ، ٤سم أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه

(٢) منشور ثلاثى قائم أرتفاعه ١٢سم وقاعدته على شكل مثلث قائم الزاوية طول وتره = ١٠سم وأحد ضلعى القائمة فيه ٦سم

أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه

(٤) منشور رباعى قائم قاعدته مربع طول ضلعه ١٠سم وأرتفاعه = ٧سم

أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه

(٥) منشور ثلاثى قائم أرتفاعه ١٠سم وقاعدته على شكل مثلث أبعاده ٣، ٤، ٥ سم

أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه

(٦) منشور رباعى قائم أرتفاعه ١٠سم وقاعدته على شكل معين طولا قطريه ٦سم ، ٨سم أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه

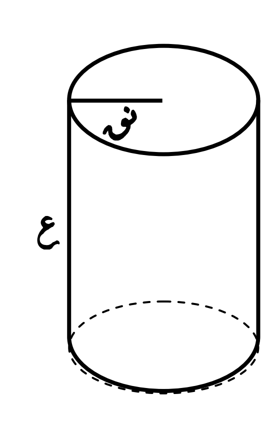
(٧) منشور رباعى قائم ارتفاعه ١٢سم وقاعدته على شكل مربع مساحته ٩سم$^{٢}$

أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه

(٨) منشور ثلاثى قائم أرتفاعه ١١سم وقاعدته المثلث أ ب جـ حيث أ ب = أ جـ = ١٠سم ، ب جـ = ١٢ سم أوجد مساحته الجانبية ومساحته الكلية وحجمه

---

## خامساً الاسطوانة الدائرية القائمة




المساحة الجانبية للاسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

= ٢ π نق × ع

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين

= ٢ π نق ع + ٢ π نق$^{٢}$

الحجم = مساحة القاعدة × الارتفاع = π نق$^{٢}$ × ع

---

**مثـــ١٤ـــال : أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٧سم وأرتفاعها ١٠ سم**

**أوجد (١) مساحتها الجانبية (٢) مساحتها الكلية (٣) حجمها**

### الحـــــــل

مساحتها الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع = ٢ π نق × ع

= ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ × ١٠ = ٤٤٠سم$^{٢}$

مساحتها الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتى القاعدتين

= ٤٤٠ + ٢ π نق$^{٢}$ = ٤٤٠ +٢ × $\frac{٢٢}{٧}$× ٤٩ = ٤٤٠ + ٣٠٨ = ٧٤٨ سم$^{٢}$

حجمها = مساحة القاعدة × الارتفاع = π نق$^{٢}$ × ع =$\frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ × ١٠ =١٥٤٠سم$^{٣}$

---

**مثـــ١٥ـــال : أسطوانة دائرية قائمة أرتفاعها ١٢سم وحجمها ١٢٠٠ π سم$^{٣}$**

**أوجد طول نصف قطر قاعدتها ثم أوجد مساحتها الجانبية**

### الحـــــــل

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع = π نق$^{٢}$ × ع = ١٢٠٠ π

∴ نق$^{٢}$ × ١٢ = ١٢٠٠ ⟸ نق$^{٢}$ = ١٠٠ ∴ نق = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠سم

مساحتها الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع= ٢ π نق × ع

= ٢ × π × ١٠ × ١٢ = ٢٤٠ π

**مثـــــال ١٦ : أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٦٤ π سم^٣ فإذا كان أرتفاعها يساوى طول نصف قطر دائرتها أوجد أرتفاعها**

**الحـــــل**

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع = ٦٤ π

∵ ع = نق ⟸ π نق^٢ ع = π ع^٢ × ع = ٦٤ π

ع^٢ × ع = ٦٤ ⟸ ع^٣ = ٦٤ ⟸ ∴ ع = $\sqrt[3]{٦٤}$ = ٤سم

**مثـــــال ١٧ : أسطوانة دائرية قائمة أرتفاعها ٤٤ سم وأرتفاعها ٥سم أوجد حجمها**

**الحـــــل**

محيط القاعدة = ٢ π نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق = ٤٤

$\frac{٤٤}{٧}$ × نق = ٤٤ ⟸ نق = ٤٤ × $\frac{٧}{٤٤}$ = ٧سم

∴ حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

= π نق^٢ ع = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ × ٥ = ٧٧٠ سم^٣

**مثـــــال ١٨ : إذا كان حجم أسطوانة دائرية قائمة ٤٤٠٠سم^٣ وأرتفاعها ١٤سم أوجد طول قطر قاعدتها**

**الحـــــل**

حجمالأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع = π نق^٢ × ع = ٤٤٠٠

$\frac{٢٢}{٧}$ × نق^٢ × ١٤ = ٤٤٠٠ ⟸ ٤٤ نق^٢ = ٤٤٠٠

نق^٢ = $\frac{٤٤٠٠}{٤٤}$ = ١٠٠ ⟸ ∴ نق = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠سم

∴ طول قطرها = ٢ نق = ٢ × ١٠ = ٢٠سم

## تمارين على الأسطوانة

(١) أسطوانة دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها = ٧سم وأرتفاعها = ٢٥سم
أوجد المساحة الجانبية للأسطوانة [ ١١٠٠سم$^{٢}$ ]

(٢) أسطوانه دائرية قائمة طول نصف قطر قاعدتها = ١٤سم وأرتفاعها = ١٠ سم
أوجد مساحتها الجانبية ومساحتها الكلية وحجمها

(٣) أسطوانةدائرية قائمة محيط قاعدتها ٤٤سم وأرتفاعها ٢٥سم أوجد حجمها
[٣٨٥٠سم$^{٣}$ ]

(٤) أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٢٥٠سم$^{٢}$ وطول قطر قاعدتها = ٢٠سم
أوجد حجمها [٢٥٠سم$^{٣}$ ]

(٥) أسطوانة دائرية قائمة أرتفاعها يساوى طول قطر قاعدته وحجمها ٢١٥٦ سم$^{٣}$
أوجد مساحتها الكلية [ ٩٢٤ سم$^{٢}$ ]

(٦) إذا كان أرتفاع أسطوانة دائرية قائمة يساوى طول نصف قطر قاعدتها وحجم
الاسطوانة ٧٢π سم$^{٣}$ أحسب أرتفاع الأسطوانة [٢ $\sqrt[3]{9}$ سم ]

(٧) أسطوانة دائرية قائمة مصمتة من المعدن أرتفاعها ٢٨سم وطول نصف قطر
قاعدتها ١١سم صُهرت وحولت إلى مكعب مصمت أوجد المساحة الكلية للمكعب

(٨) أسطوانة دائرية قائمة أرتفاعها ١٠سم وحجمها ١٥٠٤ سم$^{٣}$
أوجد طول نصف قطرها [ ٧.٠٧ سم ]

(٩) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٩٠ π سم$^{٣}$ ومساحتها الجانبية = ٦٠ π سم$^{٢}$
أوجد أرتفاعها وطول نصف قطر قاعدتها ثم أحسب مساحتها الكلية

## سادساً الكرة

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق$^{٢}$ ، حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق$^{٣}$

---

**مثـــ١٩ـــال : أوجد حجم كرة طول نصف قطرها ٧سم ثم أوجد مساحتها الجانبية**

**الحــــــل**

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق$^{٣}$ = $\frac{٤}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × (٧)$^{٣}$ = $\frac{٤٣١٢}{٣}$ سم$^{٣}$

مساحة الكرة الجانبية = ٤ π نق$^{٢}$ = ٤ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٤٩ = ٦١٦ سم$^{٢}$

---

**مثـــ٢٠ـــال : كرة حجمها $\frac{٥٠٠ ط}{٣}$ سم$^{٣}$ أوجد طول نصف قطرها**

**الحــــــل**

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق$^{٣}$ = $\frac{٥٠٠ط}{٣}$

٤ نق$^{٣}$ = ٥٠٠ ⟸ نق$^{٣}$ = $\frac{٥٠٠}{٤}$ = ١٢٥ ∴ نق = $\sqrt[٣]{١٢٥}$ = ٥سم

---

**مثـــ٢١ـــال : كرة من المعدن طول نصف قطرها ٣سم صهرت وحولت إلى أسطوانة طول نصف قطر قاعدتها ٣سم أحسب أرتفاع الاسطوانة**

**الحــــــل**

حجم الكرة = حجم الاسطوانة

$\frac{٤}{٣}$ π نق$^{٣}$ = π نق$^{٢}$ × ع ⟸ $\frac{٤}{٣}$ × (٣)$^{٣}$ = (٣)$^{٢}$ × ع

٣٦ = ٩ ع ⟸ ∴ ع = $\frac{٣٦}{٩}$ = ٤ سم

---

**مثـــ٢٢ـــال : أوجد طول نصف قطر كرة حجمها ٣٦ π سم$^{٣}$**

**الحــــــل**

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق$^{٣}$ = ٣٦ ط ⟸ نق$^{٣}$ = ٣٦ × $\frac{٣}{٤}$

∴ نق$^{٣}$ = ٢٧ ∴ نق = $\sqrt[٣]{٢٧}$ = ٣سم

## تمارين على الكرة

(١) أوجد حجم كرة طول نصف قطرها = ٣٠ سم ( $\pi$ = ٣.١٤١ ) [ ١١٣٠٧٦ سم٣ ]

(٢) كرة حجمها ٤١٨٨ سم٣ أوجد طول نصف قطرها ( $\pi$ = ٣.١٤١ ) [ ١٠سم ]

(٣) أوجد طول قطر كرة حجمها ٣٨٨٠٨ سم٣ ثم أوجد مساحة سطحها

[ ٤٢سم ، ٥٥٤٤سم٢ ]

(٤) أوجد طول نصف قطر كرة حجمها يساوى حجم أسطوانة دائرية قائمة أرتفاعها ١٨سم وطول نصف قطر قاعدتها ٤ سم [ ٦ سم ]

(٥) أوجد لاقرب سم٣ حجم كرة طول نصف قطرها يساوى طول نصف قطر قاعدة أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٧٥٣٦ سم٣ وأرتفاعها ٢٤سم ( $\pi$ = ٣.١٤ )

[ ٤١٨٦٠٧ سم٣ ]

(٦) كرة حجمها ٣٦ $\pi$ سم٣ وضعت داخل مكعب فمست أوجهه الستة

أوجد طول نصف قطر الكرة وحجمها [ ٣سم ، ٢١٦ سم٣ ]

(٧) وضعت كرة داخل مكعب فمست أوجهه السته أوجد النسبة بين حجم المكعب وحجم الكرة [ ٦ : $\pi$ ]

(٨) كرة من المعدن طول قطرها ٦سم صُهرت وحولت إلى أسطوانة طول نصف قطر قاعدتها ٣سم أحسب أرتفاع الأسطوانة

---

## تمارين على الوحدة الأولى أكمل العبارات الاتية

(١) حجم كرة طول قطرها ٦سم = .......... سم٣

(٢) إذا كان حجم كرة يساوى $\frac{٣٢}{٣}$ $\pi$ سم٣ فإن طول قطرها = .......... سم

(٣) إذا كان مساحة الاوجه الستة لمكعب ٥٤ سم٣ فإن حجمه = ........ سم٣

(٤) مكعب حجمه $٢\sqrt{٢}$ سم$^٣$ فإن طول حرفه = .......... سم

(٥) مكعب طول حرفه ٤سم فإن مساحته الكلية = .............. سم$^٢$

(٦) كرة طول نصف قطرها $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ سم فإن مساحة سطحها = .......... سم$^٢$

(٧) إذا كان حجم مكعب = ٢٧سم$^٣$ فإن مساحة أحد أوجهه = ........ سم$^٢$

(٨) إذا كان حجم كرة = $\frac{٩}{٢}$ $\pi$ سم$^٣$ فإن طول نصف قطرها يساوى .......... سم

(٩) إذا كانت مساحة مربع ٥سم$^٢$ فإذا تضاعف طول ضلعه فإن مساحته = ....... سم$^٢$

(١٠)إذا كانت مساحة دائرة = $\pi$ فإن طول قطرها = ........ سم

(١١) إذا كانت مساحة دائرة = $\pi^٣$ فإن طول نصف قطرها = ......... سم

(١٢) إذا كانت المساحة الجانبية للاسطوانه = ٤ $\pi$ نق ع فإن أرتفاعها = ........ سم

(١٣) أسطوانة دائرية قائمة حجمها ٥٠٠ $\pi$ سم$^٣$ وطول نصف قطرها ٥سم

فإن أرتفاعها = ........

(١٤) إذا كانت مساحة دائرة = ٥ $\pi$ فإن طول نصف قطرها = .......... سم

(١٥) الكرة التى طول نصف قطرها $\sqrt[٣]{٣}$ يكون حجمها = ........ سم

(١٦) الكرة التى حجمها $\frac{٤}{٣}$ $\pi$ يكون طول نصف قطرها = ......... سم

(١٧) الكرة التى مساحتها السطحية ٨ $\pi$ يكون طول نصف قطرها = ......... سم

(١٨) أسطوانة دائرية قائمة حجمها = $\pi$ ع$^٣$ فإن نق = ............

(١٩) أسطوانة دائرية قائمة حجمها = ٥ $\pi$ نق$^٢$ يكون طول قطرها = ......... سم

(٢٠) أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٢ $\pi$ نق يكون أرتفاعها = ........ سم

(٢١) أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية ٢٠ ع يكون محيط قاعدتها = ........سم

(٢٢) أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الكلية ٨ $\pi$ نق$^٢$ يكون أرتفاعها س = ...........

(٢٣) أسطوانة دائرية قائمة مساحتها الكلية ٣ $\pi$ نق ع فإن طول نصف قطرها = .....

(٢٤) كرة طول نصف قطرها ١ سم يكون حجمها = ............ سم$^٣$

(٢٥) كرة مساحتها السطحية = $\pi$ فإن طول نصف قطرها = ........

# حل المعادلات والمتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ع

## أولاً: حل المعادلات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ع

نعلم أن ٢س ـ ٣ = ٥ تسمى معادلة من الدرجة الأولى

ولحل المعادلة

نضيف (٣) للطرفين  ٢س ـ ٣ + ٣ = ٥ + ٣

٢س = ٨  ∴ س = $\frac{٨}{٢}$ = ٤

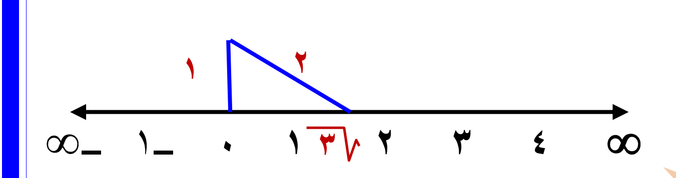
**مثــ١ــال :** أوجد فى ع مجموعة حل المعادلة $\sqrt{٣}$ س + ١ = ٤ ومثلها على خط الأعداد

### الحـــــــل

$\sqrt{٣}$ س = ٤ ـ ١ = ٣

س = $\frac{٣}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \sqrt{٣} \in$ ع

∴ م٠ح = {$\sqrt{٣}$}




**مثــ٢ــال :** أوجد فى ع مجموعة حل المعادلة س + $\sqrt{٢}$ = ٣ ومثلها على خط الأعداد

### الحـــــــل

س = ٣ ـ $\sqrt{٢} \in$ ع

∴ م٠ح = {٣ ـ $\sqrt{٢}$}

## ثانياً: حل المتباينات من الدرجة الأولى فى متغير واحد فى ع

خواص المتباينات  إذا كان ﺃ > ب فإن

(١) ﺃ + ﺟ > ب + ﺟ

(٢) ﺃ × ﺟ > ب × ﺟ  عندما ﺟ > صفر

(٣) ﺃ × ﺟ < ب × ﺟ  عندما ﺟ < صفر

**مثـــ٣ـــال : حل المتباينة ٢س ـ ١ ⩾ ٥ فى ع ومثلها على خط الأعداد**

**الحــــــل**

٢س ـ ١ + ١ ⩾ ٥ + ١ ⟸ ٢ س ⩾ ٦ بالقسمة على (٢)

∴ س ⩾ ٣

ـ∞ ـ١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ∞

**مثـــ٤ـــال : حل المتباينة ٥ ـ ٣س > ٨ فى ع ومثلها على خط الأعداد**

**الحــــــل**

ـ ٣ س > ٨ ـ ٥ ⟸ ـ ٣ س > ٣ بالقسمة على (ـ ٣)

∴ س < ـ١

ـ∞ ـ٣ ـ٢ ـ١ ٠ ١ ٢ ∞

**مثـــ٥ـــال : حل المتباينة ـ٣ ⩽ ٢س ـ ١ < ٥ فى ع ومثلها على خط الأعداد**

**الحــــــل**

ـ ٣ + ١ ⩽ ٢س ـ ١ + ١ < ٥ + ١

⟸ ـ ٢ ⩽ ٢س < ٦ بالقسمة على (٢)

∴ ـ ١ ⩽ س < ٣

ـ∞ ـ١ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ∞

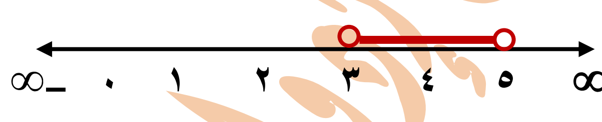
**مثـــ٦ـــال:حل المتباينة ٣س + ٥ ⩽ ٥س ـ ١ < ٣س + ٩ فى ع ومثلها على خط الأعداد**

**الحــــــل**

بطرح ٣س ⟸ ٥ < ٢س ـ ١ < ٩

بجمع ١ ⟸ ٦ < ٢س < ١٠ بالقسمة على (٢)

∴ ٣ < س < ٥



ـ∞ ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ∞

# مذكرة

# الجبر

# العلاقة بين متغيرين و الاحصاء

# الصف الثانى الاعدادى

## الفصل الدراسى الأول ٢٠٢٠

- العلاقة بين متغيرين
- ميل الخط المستقيم

**الاحصـــــاء**

- جمع البيانات وتنظيمها
- الوسط الحسابى
- الوسـيط
- المنـــوال

# الوحدة الثانية : العلاقة بين متغيرين

## دراسة العلاقة بين متغيرين :-

هى علاقة من الدرجة الاولى بين متغيرين س ، ص وتكون على الصورة
أس + ب ص = جـ حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية ، أ ، ب كلاهما ≠ الصفر
ويوجد عدد لا نهائى من الازواج المرتبة التى تحقق العلاقة والتى عند تمثيلها بيانياً تكون خط مستقيم ولذلك سميت بالعلاقة الخطية

---

**مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : س + ص = ٥**

**الحــــــل**

س + ص = ٥ ص = ٥ ــ س

عندما س = ١ ص = ٥ ــ ١ = ٤ الزوج (١ ، ٤) يحقق العلاقة

عندما س = ٢ ص = ٥ ــ ٢ = ٣ الزوج (٢ ، ٣) يحقق العلاقة

عندما س = ٣ ص = ٥ ــ ٣ = ٢ الزوج (٣ ، ٢) يحقق العلاقة

---

**مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ص ــ س = ٣**

**الحــــــل**

ص ــ س = ٣ ص = ٣ + س

عندما س = ١ ص = ٣ + ١ = ٤ الزوج (١ ، ٤) يحقق العلاقة

عندما س = ٢ ص = ٣ + ٢ = ٥ الزوج (٢ ، ٥) يحقق العلاقة

عندما س = ٣ ص = ٣ + ٣ = ٦ الزوج (٣ ، ٦) يحقق العلاقة

---

**مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ص ــ ٢ س = ٥**

**الحــــــل**

ص ــ ٢ س = ٥ ص = ٥ +٢س

عندما س=١ ص=٥+٢(١) = ٥+٢ = ٧ الزوج (١، ٧) يحقق العلاقة

عندما س=٢ ص=٥+٢(٢) = ٥+٤ = ٩ الزوج (١، ٩) يحقق العلاقة

عندما س=٣ ص=٥+٢(٣) = ٥+٦ = ١١ الزوج (١، ١١)يحقق العلاقة

مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ص = ٣

الحـــــــل

العلاقة لم تشترط أى قيمة لـ س فتكون الازواج المرتبة التى تحقق العلاقة هى جميع الازواج المرتبة التى فيها ص = ٣ وأى قيمة للمتغير س مثل

(١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٣) .......................... الخ

---

مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : س = ٤

الحـــــــل

العلاقة لم تشترط أى قيمة لـ ص فتكون الازواج المرتبة التى تحقق العلاقة هى جميع الازواج المرتبة التى فيها س = ٤ وأى قيمة للمتغير ص مثل

(٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، ......................الخ

---

مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : س +٢ص = ٧

الحـــــــل

س + ٢ ص = ٧      س = ٧ ـ ٢ ص

عندما ص=١   س= ٧ -٢(١) = ٧ ـ ٢ = ٥   (٥ ، ١) يحقق العلاقة

عندما ص=٢   س= ٧ -٢(٢) = ٧ ـ ٤ = ٣   (٣، ٢) يحقق العلاقة

عندما ص=٣   س= ٧ -٢(٣) = ٧ ـ ٦ = ١   (١ ، ٣) يحقق العلاقة

---

مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ص = س

الحـــــــل

عندما س = ١   ص = ١   ( ١ ، ١ ) يحقق العلاقة

عندما س = ٢   ص = ٢   ( ٢ ، ٢ ) يحقق العلاقة

عندما س = ٣   ص = ٣   ( ٣ ، ٣ ) يحقق العلاقة

مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : ص = -٣

الحــــــل

| | | |
|---|---|---|
| عندما س = ١ | ص = -٣ | ( ١ ، -٣ ) يحقق العلاقة |
| عندما س = ٢ | ص = -٣ | ( ٢ ، -٣ ) يحقق العلاقة |
| عندما س = ٣ | ص = -٣ | ( ٣ ، -٣ ) يحقق العلاقة |

مثـــال : أوجد ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة : س = ٥

الحــــــل

| | | |
|---|---|---|
| عندما ص = ١ | س = ٥ | ( ٥ ، ١ ) يحقق العلاقة |
| عندما ص = ٢ | س = ٥ | ( ٥ ، ٢ ) يحقق العلاقة |
| عندما ص = ٣ | س = ٥ | ( ٥ ، ٣ ) يحقق العلاقة |

مثـــال : بين أيا من الازواج التالية يحقق العلاقة ص – ٢س = ٣

( ١ ، ٢ ) ، ( ٤ ، ١١ ) ، ( ٢ ، ٥ )

الحــــــل

بالتعويض بالزوج ( ١ ، ٢ ) فى العلاقة [ س = ١ ، ص = ٢ ]

ص – ٢ س = ٢ – ٢ ( ١ ) = ٢ – ٢ = ٠ ≠ ٣ الزوج ( ١ ، ٢ ) لا يحقق العلاقة

بالتعويض بالزوج ( ٤ ، ١١) فى العلاقة [ س = ٤ ،، ص = ١١ ]

ص – ٢ س = ١١ – ٢ ( ٤ ) = ١١ – ٨ = ٣ الزوج ( ٤ ، ١١ ) يحقق العلاقة

بالتعويض بالزوج ( ٢ ، ٥ ) فى العلاقة [ س = ٢ ، ص = ٥]

ص – ٢ س = ٥ – ٢ ( ٢ ) = ٥ – ٤ = ١ ≠ ٣ الزوج ( ٢ ، ٥ ) لا يحقق العلاقة

مثـــال : إذا كان الزوج ( ك ، ٢ ) يحقق العلاقة ٣س + ص = ١٧ أوجد قيمة ك

الحــــــل

٣ س + ص = ١٧ ⟸ ٣ ( ك ) + ٢ = ١٧

٣ ك = ١٧ – ٢ ⟸ ٣ ك = ١٥ ⟸ ك = ٥

مثـــال : إذا كان الزوج ( ٢ ، ٣ ) يحقق العلاقة ك س – ٤ ص = ١٠ أوجد قيمة ك

الحـــــل

بالتعويض عن س = ٢ ، ص = ٣

فى العلاقة ك س – ٤ ص = ١٠ ⇐ ك ( ٢ ) – ٤ ( ٣ ) = ١٠

٢ك – ١٢ = ١٠ ⇐ ٢ك = ١٠ + ١٢

٢ ك = ٢٢ ⇐ ك = ١١

## التمثيل البيانى للعلاقة الخطية

لتمثيل العلاقة الخطية بيانيا نقوم بتعين ثلاث أزواج مرتبة تحقق العلاقة

ونتأكد من وقوعها على خط مستقيم واحد ويمكن تعيين زوجين فقط ولكن الزوج الثالث

للتأكيد ثم نصل بين هذه النقط مع مد الخط فى الاتجاهين حتى نكون خط مستقيم

مثـــال : مثل بيانيا العلاقة ٢س + ص = ٥

الحـــــل

لتمثيل هذه العلاقة نعين ثلاث أزواج

مرتبة تحقق العلاقة ٢س + ص = ٥

ويمكن تعديل العلاقة على الشكل ص= ٥ – ٢س

| س | ٠ | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|
| ص | ٥ | ٣ | ١ |

مثـــال : مثل بيانيا العلاقة ص – ٢ س = ١

الحـــــل

لتمثيل هذه العلاقة نعين ثلاث أزواج

مرتبة تحقق العلاقة ص – ٢ س = ١

ويمكن تعديل العلاقة على الشكل ص = ١ +٢س

| س | ٠ | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|
| ص | ١ | ٣ | ٥ |

**مثـــال : مثل بيانيا العلاقة : ص – ٣س = ٠**

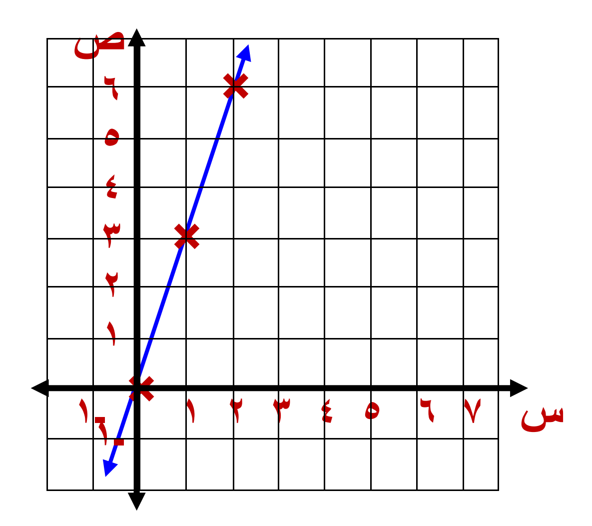
**الحــــــــل**

لتمثيل هذه العلاقة نعين ثلاث أزواج

مرتبة تحقق العلاقة ص – ٣ س = ٠

العلاقة على الشكل : ص = ٣ س

| س | ٠ | ١ | ٢ |
|---|---|---|---|
| ص | ٠ | ٣ | ٦ |




**مثـــال : مثل بيانيا العلاقة : ص – $\frac{٢}{٣}$ س = ٠**

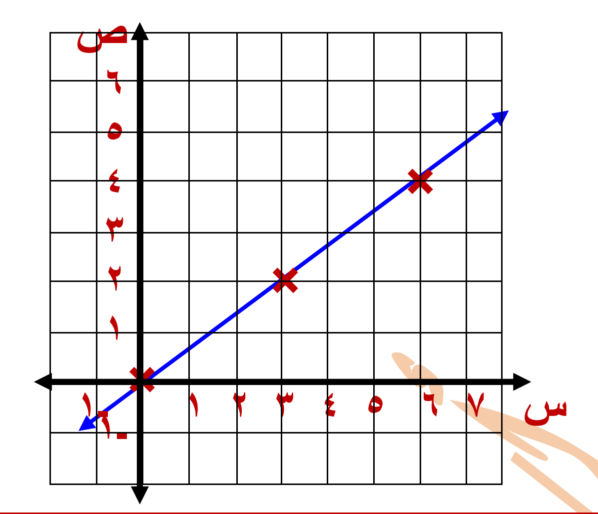
**الحــــــــل**

لتمثيل هذه العلاقة نعين ثلاث أزواج

مرتبة تحقق العلاقة ص – $\frac{٢}{٣}$ س = ٠

تعديل العلاقة على الشكل ص = $\frac{٢}{٣}$ س

| س | ٠ | ٣ | ٦ |
|---|---|---|---|
| ص | ٠ | ٢ | ٤ |




**مثـــال :** الرسم المقابل هو الرسم البيانى لاحدى العلاقات الخطية بأستخدام هذا التمثيل أكمل الازواج المرتبة التالية

(١) ( ٠ ، ......)

(٢) ( ..... ، ٥ )

(٣) ( ٢ ، ...... )

(٤) ( ...... ، ٣,٥ )

**مثـــال : حدد العلاقة التى تربط بين الازواج ( ١ ، ٢ ) ، ( ٢ ، ٤ ) ، ( ٣ ، ٦ )**

**الحـــــــل**

من الملاحظ فى الازواج أن الاحداثى الصادى ضعف الاحداثى السينى

∴ العلاقة التى تربط بين هذه الازواج هى ص = ٢ س

---

**مثـــال : حدد العلاقة التى تربط بين الازواج ( ١ ، ٣ ) ، ( ٢ ، ٥ ) ، ( ٣ ، ٧ )**

**الحـــــــل**

من الملاحظ فى الازواج أن الاحداثى الصادى يزيد عن ضعف الاحداثى السينى

بمقدار الوحدة ∴ العلاقة التى تربط بين هذه الازواج هى ص = ٢ س +١

---

**مثـــال : حدد العلاقة التى تربط بين الازواج ( ١ ، ٢ ) ، ( ٢ ، ٢ ) ، ( ٣ ، ٢ )**

**الحـــــــل**

من الملاحظ فى الازواج أن الاحداثى الصادى ثابت ويساوى ٢

∴ العلاقة التى تربط بين هذه الازواج هى ص = ٢

---

**مثـــال : حدد العلاقة التى تربط بين الازواج ( ٣ ، ١ ) ، ( ٣ ، ٤ ) ، ( ٣ ، ٦ )**

**الحـــــــل**

من الملاحظ فى الازواج أن الاحداثى السينى ثابت ويساوى ٣

∴ العلاقة التى تربط بين هذه الازواج هى س = ٣

---

**مثـــال : حدد العلاقة التى تربط بين الازواج ( ١ ، ٢ ) ، ( ٢ ، ٥ ) ، ( ٣ ، ٨ )**

**الحـــــــل**

من الملاحظ فى الازواج أن الاحداثى الصادى يقل عن ثلاث أمثال الاحداثى

السينى بمقدار الوحدة ∴ العلاقة التى تربط بين هذه الازواج هى ص = ٣س ــ ١

---

**مثـــال : حدد العلاقة التى تربط بين الازواج ( ٤ ، ٦ ) ، ( ٦ ، ٩ ) ، ( ٨ ، ١٢ )**

من الملاحظ فى الازواج أن الاحداثى الصادى = $\frac{٣}{٢}$ × الاحداثى السينى

∴ العلاقة التى تربط بين هذه الازواج هى : ص = $\frac{٣}{٢}$ س

# تمارين على العلاقة بين متغيرين

[١] أكمل الازواج المرتبة الاتية التى تحقق العلاقة ص = ٢ س +١

(٥ ، .....) ، ( ...... ، ٢١) ، ( ٠ ، .....) ، ( ...... ، -٥ ) ، ( ٤ ، .....)

[٢] بين أيا من الازواج المرتبة الاتية تحقق العلاقة ص = ٣س +٢

( أ ) ( ١ ، ٧ )   (ب) (٤ ، ١٤)   (جـ) ( ٠ ، ٤ )   ( ء ) (-١ ، -١)

[٣] أوجد أربعة أزواج مرتبة تحقق العلاقات الاتية

( أ ) ص = س +١   (ب) ص = ٣س – ٤

(جـ) ص – ٥ س = ١   (ء) ٢ص – س = ٧

( هـ ) ٢ص +٣ س = ٧   ( و ) ٢ص = ٣س

[ ٤ ] بأستخدام العلاقات الخطية أكمل الجدول التالى

( أ ) ص – س = ١

| س | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ص | | | | | |

(ب) ص – ٣ س = ٢

| س | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|
| ص | | | | | |

(جـ) ص = ٣س

| س | ١ | | ٣ | | ٥ |
|---|---|---|---|---|---|
| ص | | ٦ | | ٢١ | |

( ء ) ص + ١ = ٢س

| س | ٠ | | ٢ | | ٩ |
|---|---|---|---|---|---|
| ص | | ٥ | | ٧ | |

[ ٥ ] إذا كانت ص – ٣ س = ٢ فأوجد

( أ ) قيمة ص عندما س = ٢   (ب) قيمة ص عندما س = -٤

[ ٦ ] إذا كان ( ٣ ، ٦ ) يحقق العلاقة ص = ك س   فأوجد قيمة ك   [ ٢ ]

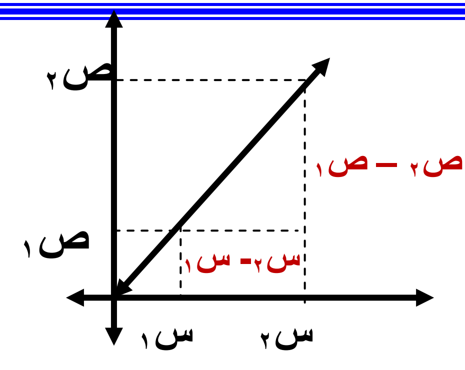
[ ٧ ] إذا كان ( ٢ ، ك ) يحقق العلاقة ص – ٣ س = ١   أوجد قيمة ك   [٧]

[٨] مثل بيانيا كلا من العلاقات الاتية

(١) ص = ٢ س -٣   (٢) ص = س +٢

(٣) ص - س = ٣   (٤) ص = - ٢ س

# ميل الخط المستقيم




ميل الخط المستقيم :-

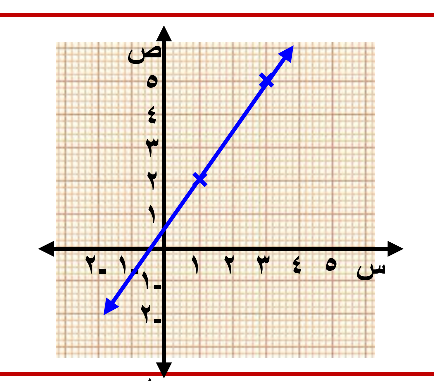
(١) بمعلومية نقطتين :-

المستقيم المار بالنقطتين (س١، ص١) ، (س٢ ، ص٢)

يكون ميله م = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$ = $\frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الافقى}}$ = $\frac{\text{التغير فى الاحداثى الصادى}}{\text{التغير فى الاحداثى السينى}}$

---

مثـــال : أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين ( ١ ، ٢ ) ، ( ٣ ، ٥ )

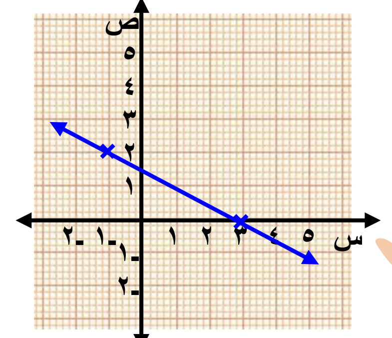


الحـــل

م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$ = $\frac{٥ - ٢}{٣ - ١}$ = $\frac{٣}{٢}$

---

مثـــال : أوجد ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين (-١ ، ٢ ) ، ( ٣ ، ٠ )



الحـــل

م = $\frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$ = $\frac{٠ - ٢}{٣ - (-١)}$ = $\frac{-٢}{٤}$ = $\frac{-١}{٢}$

---

مثـــال : إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين ( ١ ، ٣) ، ( ٥ ، ص ) يساوى ٢ أوجد قيمة ص

الحـــل

م = $\frac{\text{ص} - ٣}{٥ - ١}$ = ٢ ⟸ $\frac{\text{ص} - ٣}{٤}$ = ٢

ص – ٣ = ٨ ⟸ ص = ٨ + ٣ = ١١

---

ملاحظات :-

(١) ميل محور السينات = ميل أى مستقيم أفقى = صفر

(٢) ميل أى مستقيم يوازى محور السينات = صفر

(٣) ميل محور الصادات = ميل أى مستقيم رأسى = غير معرف

(٤) ميل أى مستقيم يوازى محور الصادات = غير معرف

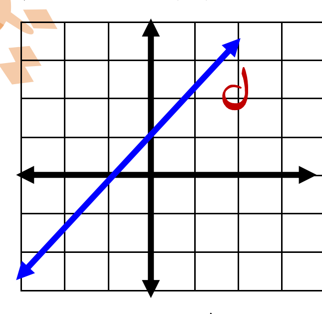
(٥) معادلة محور السينات ص = ٠

(٦) معادلة محور الصادات س = ٠

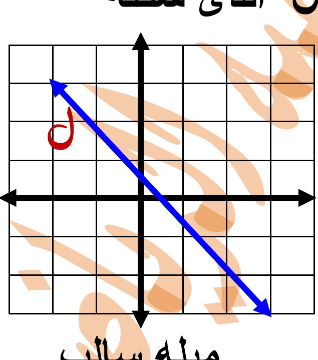
(٧) معادلة أى مستقيم يوازى محور السينات هى ص = ثابت

(٨) معادلة أى مستقيم يوازى محور الصادات هى س = ثابت

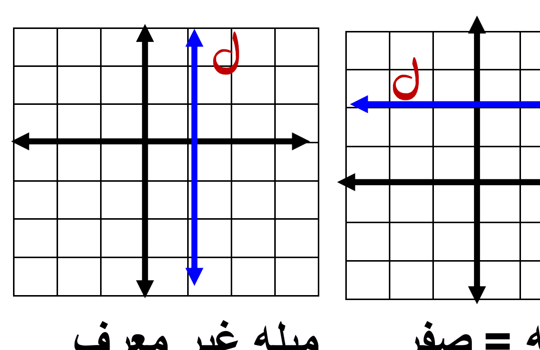
(٩) المستقيم ل الذى شكله




ميله موجب




ميله سالب






ميله = صفر      ميله غير معرف

**ملاحظة :-**

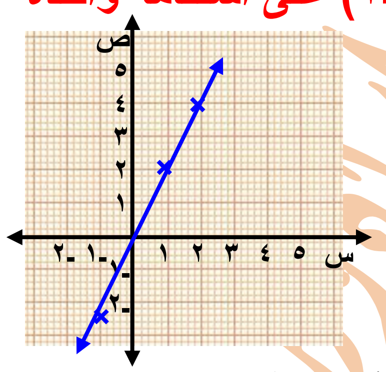
١- ميل أى مستقيم ثابت لا يتوقف على النقطتين

٢- لاثبات أن أ، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة أو تنتمى لمستقيم واحد

نثبت أن ميل أب = ميل ب جـ   $م_{أب} = م_{ب جـ}$

---

**مثـــال:** إثبت أن النقط أ = (١ ، ٢)، ب = (٢ ، ٤)، جـ = (ـ١ ، ـ٢) على أستقامة واحدة




**الحـــل**

ميل أ ب = $\frac{4-2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$

ميل ب جـ = $\frac{8-4}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$

ميل أب = ميل ب جـ   ∴ أ ، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة

---

**مثـــال : إذا كانت النقط م(-١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ١) ، جـ = (٧ ، ك) تقع على أستقامة واحدة أوجد قيمة ك**

**الحـــل**

م ، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة ∴ ميل م ب = ميل ب جـ

$م_{مب} = م_{ب جـ} \Leftarrow \frac{١ - ٢}{٣ + ١} = \frac{ك - ١}{٧ - ٣}$

$\frac{-١}{٤} = \frac{ك - ١}{٤} \Leftarrow ك - ١ = -١$ ∴ ك = صفر

---

**مثـــال : إذا كانت م = ( ٤ ، -٣ ) ، ب = ( -٦ ، ك ) ، جـ = ( ٥ ، -٤ ) تقع على أستقامة واحدة أوجد قيمة ك**

**الحـــل**

م ، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة ⇐ ميل م ب = ميل م جـ

$\frac{ك + ٣}{-٦ - ٤} = \frac{-٤ + ٣}{٥ - ٤} \Leftarrow \frac{ك + ٣}{-١٠} = \frac{-١}{١}$

$ك + ٣ = ١٠ \Leftarrow ك = ١٠ - ٣ = ٧$

---

**مثـــال : إذا كانت م = (-٢ ، ك ) ، ب = ( ٢ ، ٤ ) ، جـ = ( ٦ ، -٤ ) تقع على أستقامة واحدة أوجد قيمة ك**

**الحـــل**

م ، ب ، جـ تقع على أستقامة واحدة ⇐ ميل م ب = ميل ب جـ

$\frac{ك - ٤}{-٢ - ٢} = \frac{-٤ - ٤}{٦ - ٢} \Leftarrow \frac{ك - ٤}{-٤} = \frac{-٨}{٤} = -٢$

$ك - ٤ = ٨ \Leftarrow ك = ٨ + ٤ = ١٢$

---

# تمارين على ميل الخط المستقيم

**[ ١ ]** عين ميل المستقيم المار بكل زوج من النقاط الاتية

(١) ( ٢ ، ١ ) ، ( ٤ ، ٥ )    (٢) (-١ ، ٢ ) ، ( ٣ ، ٥ )

(٣) ( ٠ ، ٤ ) ، ( ٥ ، ٠ )    (٤) ( -١ ، -٢ ) ، ( -٣ ، ٥ )

(٥) ( ٠ ، ٣ ) ، ( ٤ ، ٧ )    (٦) ( ٣ ، -١ ) ، ( -٢ ، ٤ )

[ ٢ ] فى الشكل المقابل ؏ ب جـ مثلث فيه ب جـ // محور السينات

حدد نوع ميل كلا من المستقيمات الاتية من حيث

(موجب – سالب – صفر – غير معرف)

(١) ميل ؏ ب ............ (٢) ميل ؏جـ ..........

(٣) ميل ب جـ .......... (٤) ميل ب ء ..............

[ ٣ ] إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (١، ٢) ، (٣ ، ك) يساوى ٢ أوجد قيمة ك

[ ٤ ] إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين ( -٢،٤) ، ( ١ ، ك ) يساوى ٥ أوجد قيمة ك

[ ٥ ] أكمل ما ياتى

١- ميل محور السينات وأى مستقيم يوازيه ( أفقى ) = ..............

٢- ميل محور الصادات وأى مستقيم يوازيه ( رأسى ) = ..............

٣- المستقيم س = ٤ يوازى محور .............. ويكون ميله = ...........

٤- ميل المستقيم العمودى على محور السينات = .............

٥- ميل المستقيم العمودى على محور الصادات = .............

٦- المستقيم س = ٣ يقطع محور السينات فى النقطة ...............

[٦] أوجد ميل المستقيمات التى تمر بكل زوج من النقط الاتية

(١) أ ( ١ ، ٣ ) ، ب = ( ٣ ، ٤ ) (٢) س ( ٣ ، ٢ ) ، ص = ( ٥ ، ٧ )

(٣) ف(-٢ ، ١ ) ، ق ( ٣ ، ٤ ) (٤) م ( ٣ ، -١ ) ، ن ( ٥ ، ٢ )

[٧] إذا كان المستقيم المار بالنقطتين ( ٢ ، ٥ ) ، ( ٤ ، ك ) يوازى محور السينات أوجد قيمة ك [ ك = ٥ ]

[٨] إذا كان المستقيم المار بالنقطتين ( ٣ ، ٤ ) ، ( ك ، ٦ ) يوازى محور الصادات أوجد قيمة ك [ ك = ٣ ]

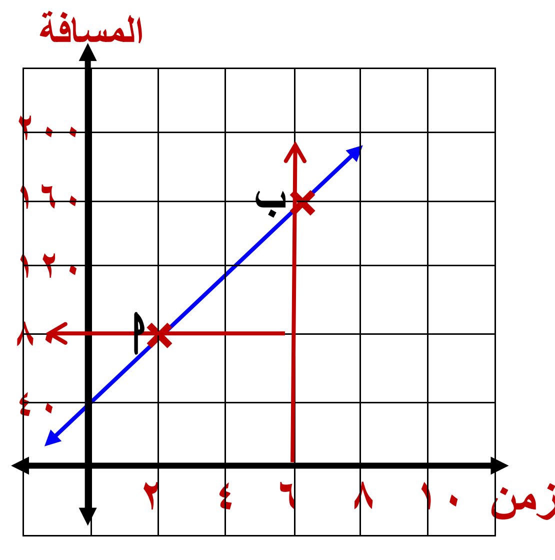
[٩] أثبت أن ؏ ،ب ،جـ تقع على أستقامة واحدة ؏=(١، ١)، ب = (٣،٣)،جـ = (٦،٦)

[١٠] إذا كانت النقط ؏ = ( ١ ، ٢ ) ، ب = ( ٢ ، ٤ ) ، جـ = ( ٤ ، ص ) تقع على أستقامة واحدة أوجد قيمة ص

# تطبيقات حياتية على ميل المستقيم

**مثـــال :** الشكل البيانى المقابل يمثل حركة سيارة من النقطة أ إلى النقطة ب مقيسة (ف) بالمتر والزمن (ن) بالثانية

سرعة السيارة = ميل المستقيم أ ب




ميل أ ب = $\frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$

نعين أ ( ٢ ، ٨٠ ) ، ب ( ٦ ، ١٦٠ )

ميل أ ب = $\frac{١٦٠ - ٨٠}{٦ - ٢}$ = $\frac{٨٠}{٤}$ = ٢٠ م/ث

المسافة المقطوعة بعد ٨ ثوان من بداية الحركة

= ٢٠٠ متر

---

**مثـــال :** الشكل المقابل يوضح العلاقة بين المسافة (ف) بالمتر والزمن (ن) بالثانية

**الحـــل**

المسافة
١٢
١٠
٨
٦
٤
٢
أ
ب
جـ
٢
٤
٦
٨
١٠
زمن

السرعة فى المسافة من أ إلى ب

= ميل المستقيم أ ب

= ميل أ ب = $\frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$

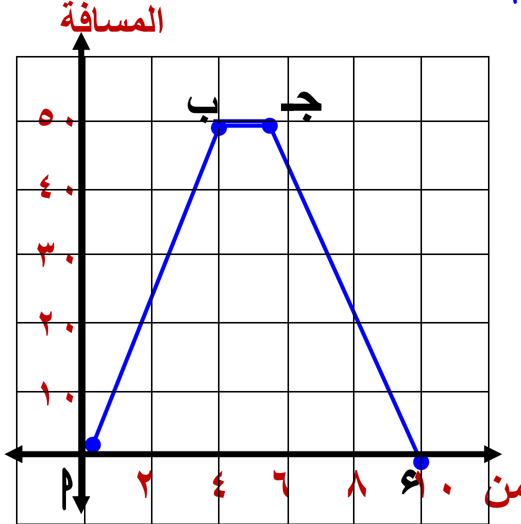
= $\frac{٤ - ٢}{٤ - ٠}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ متر / ث

السرعة فى المسافة من ب إلى جـ

ميل ب جـ = $\frac{١٢ - ٤}{١٠ - ٤}$ = $\frac{٦}{٤}$ = $\frac{٣}{٢}$ متر/ث

**مثـــال : تحرك وليد بدراجته من القاهرة إلى بنها ثم عاد**

**سرعت وليد خلال رحلة الذهاب = ميل المستقيم م ب**




نعين م ( ٠ ، ٠ ) ، ب ( ٤ ، ٥٠ )

$$\text{الميل} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}} = \frac{٥٠ - ٠}{٤ - ٠} = ١٢,٥ \text{ كم/ س}$$

السرعة تزدات بمرور الزمن

**سرعته خلال رحلة العودة**

نعين جـ ( ٥ ، ٥٠ ) ، ء ( ١٠ ، ٠ )

$$\text{ميل جـ ء} = \frac{٠ - ٥٠}{١٠ - ٥} = \frac{- ٥٠}{٥} = - ١٠ \text{ كم/س}$$

وتكون السرعة تقل بمرور الزمن

الفترة من ب إلى جـ تعنى توقف الحركة لمدة ساعة من الساعة الرابعة إلى الخامسة

# الوحدة الثالثة : الاحصاء

## جمع البيانات وتنظيمها

**** لدراسة ظاهرة ما نتبع الآتى :**

* نجمع البيانات من مصادرها
* تنظم البيانات وتعرض فى جداول تكرارية
* نستخدم أحدى الطرق الإحصائية لتحليل البيانات
* نفسر النتائج التى توصلنا إليها
* نقدم المقترحات لعلاج هذه الظاهرة

**** أنواع البيانات وطرق جمعها**

* بيانات إبتدائية : وهى البيانات المجمعة بإستخدام كشوف الملاحظة والإستبيانات
* بيانات ثانوية : وهى البيانات المجمعة من الإنترنت ، الكتب ، الوثائق ، النشرات الإحصائية
* بيانات تجريبية : وهى البيانات المجمعة بإستخدام التجارب لإختبار نظرية

**** لتنظيم البيانات وعرضها فى جداول تكرارية نتبع الخطوات التالية :**

* نوجد أكبر قيمة و أصغر قيمة لهذه البيانات
* نوجد المدى : حيث المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة
* نجزئ مجموعة البيانات إلى مجموعات جزئية متساوية المدى ولتكن ٦ مجموعات
* مدى المجموعة = مدى البيانات ÷ ٦
* تسجل البيانات فى جدول التفريغ المكون من ثلاثة أعمدة :

عمود المجموعات     عمود العلامات     عمود التكرار

* نحذف عمود العلامات فنحصل على الجدول التكرارى ذى المجموعات

**مثال : البيان التالى الدرجات التى حصل عليها ٣٠ طالب فى أحد الإختبارات :**

| ٧ | ١٠ | ٧ | ٤ | ٥ | ٨ | ٦ | ٧ | ١٣ | ١٢ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٢ | ٩ | ١١ | ١٢ | ١١ | ٩ | ١٥ | ١٢ | ١٣ | ٩ |
| ٥ | ١٤ | ١٩ | ٣ | ٩ | ١٤ | ٣ | ١٣ | ٨ | ١٧ |

**والمطلوب تكوين الجدول التكرارى ذى المجموعات لهذه البيانات**

**الحـــــــــل**

أكبر قيمة لهذه البيانات = ١٩ ، اصغر قيمة = ٢

المدى = ١٩ ــ ٢ = ١٧

نجزئ مجموعة البيانات إلى مجموعات جزئية متساوية المدى ليكن ٦ مجموعات

مدى المجموعة = ١٧ ÷ ٦ ≈ ٣

تصبح المجموعات الجزئية كالآتى : ٢ ــ ، ٥ ــ ، ٨ ــ وهكذا

| المجموعات | العلامات | التكرار |
|---|---|---|
| المجموعات | العلامات | التكرار |
| ٢ ــ | //// | ٤ |
| ٥ ــ | ///// / | ٦ |
| ٨ ــ | ///// // | ٧ |
| ١١ ــ | ///// /// | ٨ |
| ١٤ ــ | /// | ٣ |
| ١٧ ــ | // | ٢ |
| المجموع | | ٣٠ |

يحذف عمود العلامات من الجدول فنحصل على الجدول التكرارى ذى المجموعات ويمكن كتابته رأسياً أو أفقياً والصورة الأفقية للجدول هى :

**لاحظ :** ٢ ــ تعنى أن مجموعة البيانات ≥ ٢ و < ٥

** تسجل البيانات فى الجدول التالى :

| المجموعة | ٢ ــ | ٥ ــ | ٨ ــ | ١١ ــ | ١٤ ــ | ١٧ ــ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٤ | ٦ | ٧ | ٨ | ٣ | ٢٢ | ٣٠ |

**تدريب ١ : كون جدول تكرارى ذى مجموعات للبيانات الآتية :**

| ٤٣ | ٣٣ | ٣١ | ١٥ | ٤٤ | ٢٤ | ٣٤ | ٣٩ | ٢٧ | ٣٨ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٤٢ | ٢٥ | ٢٩ | ٢١ | ٢٩ | ٣٠ | ٣٣ | ٢٦ | ٣٣ | ٣٧ |
| ٤٠ | ٢٦ | ٣٢ | ٢١ | ٢٥ | ٣٠ | ٣٦ | ٣٢ | ٢٣ | ٣٦ |
| ٢٩ | ٣٥ | ٢٧ | ٣٤ | ٢٨ | ٢٢ | ٣١ | ١٩ | ٢٨ | ٣١ |

## تمارين

**١ – أكمل ما يأتى :**

(١) من أنواع البيانات .............. ، .............. , ..............

(٢) المدى لمجموعة من القيم = ............

(٣) جدول التفريغ يتكون من .............. ، .............. , ..............

(٤) الجدول التكرارى ذى المجموعات يتكون من .............. ،..............

(٥) نحصل على الجدول التكرارى ذى المجموعات من جدول التفريغ بحذف عمود ...

**٢ – البيانات التالية تبين درجات الحرارة المئوية فى ٢٠ يوماً متتالية من أيام السنة كون جدول تكرارى لهذه البيانات**

| ١٧ | ١٠ | ٢٣ | ٢٨ | ١٢ | ٣٥ | ١٥ | ٣٦ | ٣٣ | ١٤ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٣٢ | ٨ | ٣٣ | ٣٥ | ١٣ | ١٥ | ٢٧ | ٢٢ | ٣٥ | ١٦ |

**٤- من البيانات التالية كون جدول تكرارى لهذه البيانات**

| ٤٣ | ٣٣ | ٣١ | ١٥ | ٤٤ | ٢٤ | ٣٤ | ٣٩ | ٢٧ | ٣٨ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٤٢ | ٢٥ | ٢٩ | ٢١ | ٢٩ | ٣٠ | ٣٣ | ٢٦ | ٣٣ | ٣٧ |
| ٤٠ | ٢٦ | ٣٢ | ٢١ | ٢٥ | ٣٠ | ٣٦ | ٣٢ | ٢٣ | ٣٦ |
| ٢٩ | ٣٥ | ٢٧ | ٣٤ | ٢٨ | ٢٢ | ٣١ | ١٩ | ٢٨ | ٣١ |
| ٤٣ | ٣٣ | ٣١ | ١٥ | ٤٤ | ٢٤ | ٣٤ | ٣٩ | ٢٧ | ٣٨ |
| ٤٢ | ٢٥ | ٢٩ | ٢١ | ٢٩ | ٣٠ | ٣٣ | ٢٦ | ٣٣ | ٣٧ |
| ٤٠ | ٢٦ | ٣٢ | ٢١ | ٢٥ | ٣٠ | ٣٦ | ٣٢ | ٢٣ | ٣٦ |
| ٢٩ | ٣٥ | ٢٧ | ٣٤ | ٢٨ | ٢٢ | ٣١ | ١٩ | ٢٨ | ٣١ |

# الجدول التكرارى المتجمع الصاعد والجدول التكرارى المتجمع النازل وتمثيلهما بيانيا

(١) الجدول التكرارى المتجمع الصاعد و تمثيله بيانياً :

كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد لبيانات الجدول الآتى ومثله بيانياً :

| ا لمجموعات | ١٨ – | ٢٤ – | ٣٠ – | ٣٦ – | ٤٢ – | ٤٨ – | ٥٤ – | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ا لتكرار | ٢ | ٤ | ١٠ | ١٨ | ٨ | ٦ | ٢ | ٥٠ |

الحـــــــل

لتكوين الجدول التكرارى المتجمع الصاعد :

نكون جدول من عمودين العمود الأول للحدود العليا للمجموعات ،

والعمود الثانى للتكرار المتجمع الصاعد و نبدأ بالتكرار صفر لماذا ؟

ثم نجمع التكرارات بالتتابع

وللتمثيل البيانى :

نخصص المحور الأفقى للمجموعات ، والمحور الرأسى للتكرار المتجمع الصاعد

نختار مقياس رسم مناسب للتكرار المتجمع الصاعد بحيث يتسع المحور الرأسى للتكرار الكلى الصاعد عدد عناصر المجموعة

نمثل التكرار المتجمع الصاعد لكل مجموعة و نرسم الخط البيانى لها بالتتابع

| الحدود العليا للمجموعات | التكرار المتجمع الصاعد | أجمع ↓ |
|---|---|---|
| أقل من ١٨ | صفر | |
| أقل من ٢٤ | ٢ + ٠ = ٢ | ٢ |
| أقل من ٣٠ | ٢ + ٤ = ٦ | ٤ |
| أقل من ٣٦ | ٦ + ١٠ = ١٦ | ١٠ |
| أقل من ٤٢ | ١٦+ ١٨= ٣٤ | ١٨ |
| أقل من ٤٨ | ٣٤+ ٨ = ٤٢ | ٨ |
| أقل من ٥٤ | ٤٢+ ٦= ٤٨ | ٦ |
| أقل من ٥٨ | ٤٨ ٢= ٥٠ | ٢ |

التكرار المتجمع الصاعد

٥٠ ٤٥ ٤٠ ٣٥ ٣٠ ٢٥ ٢٠ ١٥ ١٠ ٥

١٨ ٢٤ ٣٠ ٣٦ ٤٢ ٤٨ ٥٤ ٥٨ المجموعات

## (٢) الجدول التكرارى المتجمع النازل و تمثيله بيانياً :

كون الجدول التكرارى المتجمع النازل لبيانات الجدول الآتى ومثله بيانياً :

| المجموعات | ١٨ ــ | ٢٤ ــ | ٣٠ ــ | ٣٦ ــ | ٤٢ ــ | ٤٨ ــ | ٥٤ ــ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٢ | ٤ | ١٠ | ١٨ | ٨ | ٦ | ٢ | ٥٠ |

### الحـــــــل

لتكوين الجدول التكرارى المتجمع النازل :

نكون جدول من عمودين العمود الأول للحدود السفلى للمجموعات ،

والعمود الثانى للتكرار المتجمع النازل و نبدأ بمجموع التكرارات لماذا ؟

ثم نطرح التكرارات بالتتابع أو نبدأ من آخر مجموعة بالتكرار صفر ونجمع التكرارات بالتتابع من أسفل لأعلى

وللتمثيل البيانى : نتبع نفس خطوات تمثيل الجدول التكرارى المتجمع الصاعد

| الحدود السفلى للمجموعات | التكرار المتجمع النازل | أطرح ↓ |
|---|---|---|
| ١٨ فأكثر | ٥٠ | ٢ |
| ٢٤ فأكثر | ٥٠ - ٢ = ٤٨ | ٤ |
| ٣٠ فأكثر | ٤٨ - ٤ = ٤٤ | ١٠ |
| ٣٦ فأكثر | ٤٤ - ١٠ = ٣٤ | ١٨ |
| ٤٢ فأكثر | ٣٤ - ١٨ = ١٦ | ٨ |
| ٤٨ فأكثر | ١٦ ــ ٨ = ٨ | ٦ |
| ٥٤ فأكثر | ٨ ــ ٦ = ٢ | ٢ |
| ٥٨ فأكثر | ٢ ــ ٢ = صفر | |

## تمارين

١ – ا لجدول الآتي يبين ا لتوزيع ا لتكراري لدرجات ٦٠ طالباً في إحدى ا لمواد

| مجموعات ا لدرجات | ٠ – | ١٠ – | ٢٠ – | ٣٠ – | ٤٠ – | ا لمجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد ا لطلاب | ٣ | ١٣ | ١٧ | ٢٣ | ٥ | ٦٠ |

أرسم ا لمنحنى ا لتكراري ا لمتجمع ا لنازل

٢ – أرسم ا لمنحنى ا لتكراري ا لمتجمع ا لصاعد للتوزيع ا لتكراري الآتي :

| ا لمجموعات | ٢ – | ٤– | ٦ – | ٨ – | ١٠ – | ١٢ – | ا لمجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ا لتكرار | ٥ | ١٥ | ٣٠ | ٢٤ | ١٧ | ٩ | ١٠٠ |

٣ – الجدول الآتي يبين التوزيع التكراري لدرجات ١٠٠ طالب في إمتحان إحدى المواد

| المجموعات | ٠ – | ١٠ – | ٢٠ – | ٣٠ – | ٤٠ – | ٥٠ – | ا لمجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٨ | ١٤ | ١٥ | ٢٨ | ٢٣ | ١٢ | ١٠٠ |

أرسم ا لمنحنى ا لتكراري ا لمتجمع ا لصاعد والنازل

أوجد عدد الطلاب الحاصلين على أقل من ٤٠ درجة ، الحاصلين على ٤٠ درجة فأكثر

النسبة المئوية لنجاح الطلاب علماً بأن النهاية الصغرى للنجاح ٢٠ درجة

٤ – ا لجدول الآتي يبين ا لتوزيع التكراري لأعمار ٥٠ عامل بأحد المصانع

| المجموعات | ٢٠ – | ٢٥ – | ٣٠ – | ٣٥ – | ٤٠ – | ٤٥ – | ٥٠ – | ا لمجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٥ | ٨ | ٩ | ١٢ | ..... | ٥ | ٢ | ٥٠ |

أكمل الجدول

* أرسم ا لمنحنى ا لتكراري ا لمتجمع ا لصاعد والنازل
* عدد العمال الذين أعمارهم ٣٥ سنة فأكثر
* عدد العمال الذين أعمارهم أقل من ٣٥ سنة

# الوسط الحسابى

**تعريف :**

الوسط الحسابى هو القيمة التى لو أعطيت لكل مفردة " قيمة " من مفردات " قيم " المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة هو نفس مجموع القيم الأصلية

$$\text{الوسط الحسابى لمجموعة من القيم} = \frac{\text{مجموع قيم المفردات}}{\text{عدد هذه المفردات}}$$

**مثـــال : أوجد الوسط الحسابى للقيم : ٣ ، ٥ ، ١٧ ، ١٨ ، ٧ ، ١١ ، ٢**

$$\text{الوسط الحسابى} = \frac{٣ + ٥ + ١٧ + ١٨ + ٧ + ١١ + ٢}{٧} = \frac{٦٣}{٧} = ٩$$

---

**الوسط الحسابى لبيانات جدول تكرارى ذى مجموعات :**

**الخطوات** : تتضح الخطوات من المثال الآتى :

**مثـــال: أوجد الوسط الحسابى للتوزيع التكرارى الآتى :**

| المجموعات | ١٠ ــ | ٢٠ ــ | ٣٠ ــ | ٤٠ ــ | ٥٠ ــ | ٦٠ ــ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٢ | ٨ | ١٧ | ٢٣ | ٧ | ٣ |

$$\text{نحدد مراكز المجموعات ( م ) م} = \frac{\text{الحد الأدنى للمجموعة + الحد الأعلى للمجموعة}}{٢}$$

$$\therefore \text{مركز المجموعة الأولى} = \frac{١٠ + ٢٠}{٢} = ١٥$$

، حيث أن مدى المجموعات = ١٠

∴ نضيف ١٠ لمراكز المجموعات بالتتابع و نكون الجدول الآتى :

| المجموعات | مركز المجموعة م | التكرار ك | م × ك |
|---|---|---|---|
| ١٠ ــ | ١٠ | ٢ | ٢٠ |
| ٢٠ ــ | ٢٥ | ٨ | ٢٠٠ |
| ٣٠ ــ | ٣٥ | ١٧ | ٥٩٥ |
| ٤٠ ــ | ٤٥ | ٢٣ | ١٠٣٥ |
| ٥٠ ــ | ٥٥ | ٧ | ٣٨٥ |
| ٦٠ ــ | ٦٥ | ٣ | ١٩٥ |
| المجموع | | ٦٠ | ٢٤٣٠ |

$$\text{الوسط الحسابى} = \frac{\text{مجموع ( ك × م )}}{\text{مجموع ك}} = \frac{٢٤٣٠}{٦٠} = ٤٠,٥$$

مثـــال : أوجد الوسط الحسابى للجداول التكرارى الآتى :

| المجموعات | ١٦ ــ | ٢٠ ــ | ٢٤ ــ | ٢٨ ــ | ٣٢ــ | ٣٦ ــ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٣ | ٥ | ١٢ | ٧ | ٢ | ١ |

، حيث أن مدى المجموعات = ٤

∴ نضيف ٤ لمراكز المجموعات بالتتابع و نكون الجدول الآتى :

| المجموعات | مركز المجموعة م | التكرار ك | م × ك |
|---|---|---|---|
| ١٦ ــ | ١٨ | ٣ | ٥٤ |
| ٢٠ ــ | ٢٢ | ٥ | ١١٠ |
| ٢٤ ــ | ٢٦ | ١٢ | ٣١٢ |
| ٢٨ ــ | ٣٠ | ٧ | ٢١٠ |
| ٣٢ــ | ٣٤ | ٢ | ٦٨ |
| ٣٦ ــ | ٣٨ | ١ | ٣٨ |
| المجموع | | ٣٠ | ٧٩٢ |

الوسط الحسابى = $\frac{\text{مجموع ( ك × م )}}{\text{مجموع ك}}$ = $\frac{٧٩٢}{٣٠}$ = ٢٦,٤

## تمـــارين

١ ــ أوجد الوسط الحسابى لكل من مجموعات القيم الآتية :

(١) ٥ ، ٧ ، ٨ ، ١٢ ، ١٣ ، ٥

(٢) ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٤ ، ٩ ، ٥ ، ٨

(٣) ٢٣ ، ٤٧ ، ٢٤ ، ٥٢ ، ٣٣ ، ١٦

(٤) ٦ ، ٦ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٨ ، ١٠

(٢) أوجد الوسط الحسابى للجداول التكرارى الآتى :

| المجموعات | ٦٠ ــ | ٧٠ ــ | ٨٠ ــ | ٩٠ ــ | ١٠٠ــ | ١١٠ ــ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٤ | ١٦ | ١٨ | ٢٥ | ١٨ | ١٩ |

(٣) أوجد الوسط الحسابى للجداول التكرارى الآتى :

| المجموعات | ٥ ــ | ١٥ ــ | ٢٥ــ | ٣٥ ــ | ٤٥ــ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٣ | ٤ | ٧ | ٤ | ٢ | ٢٠ |

# الوســيط

**تعريف :**

الوسيط هو القيمة التى تتوسط مجموعة المفردات " القيم " بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً بحيث يكون عدد القيم الأصغر منها مساوياً لعدد القيم الأكبر منها

**خطوات إيجاد الوسيط لتوزيع تكرارى :**

ننشأ الجدول التكرارى المتجمع الصاعد أو النازل ثم نرسم المنحنى التكرارى المتجمع له

نحدد ترتيب الوسيط = مجموع التكرارات / ٢

نحدد نقطة على المحور الرأسى " التكرار المتجمع " والتى تمثل ترتيب الوسيط ثم نرسم منها مستقيماً أفقياً يقطع المنحنى المتجمع فى نقطة نرسم منها عموداً على المحور الأفقى فيقطعه فى نقطة تمثل الوسيط

" وإذا رسمنا المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل معاً فإن الإحداثى الأفقى لنقطة تقاطعهما تمثل الوسيط "

**مثـــــال : أوجد الوسيط للتوزيع التكرارى الآتى :**

| المجموعات | ١٨ – | ٢٤ – | ٣٠ – | ٣٦ – | ٤٢ – | ٤٨ – | ٥٤ – | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٢ | ٤ | ١٠ | ١٨ | ٨ | ٦ | ٢ | ٥٠ |

**الحـــــل**

عن طريق المنحنى التكرارى المتجمع الصاعد

| الحدود العليا للمجموعات | التكرار المتجمع الصاعد |
|---|---|
| أقل من ١٨ | صفر |
| أقل من ٢٤ | ٢ |
| أقل من ٣٠ | ٦ |
| أقل من ٣٦ | ١٦ |
| أقل من ٤٢ | ٣٤ |
| أقل من ٤٨ | ٤٢ |
| أقل من ٥٤ | ٤٨ |
| أقل من ٥٨ | ٥٠ |

التكرار المتجمع

٥٠ ، ٤٥ ، ٤٠ ، ٣٥ ، ٣٠ ، ٢٥ ، ٢٠ ، ١٥ ، ١٠ ، ٥

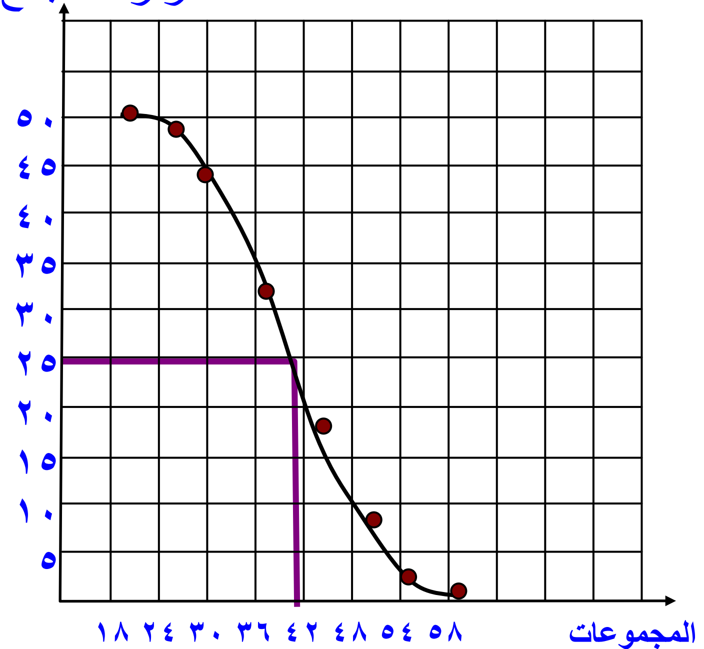
١٨ ٢٤ ٣٠ ٣٦ ٤٢ ٤٨ ٥٤ ٥٨ المجموعات

ترتيب الوسيط = ٥٠ / ٢ = ٢٥

من الرسم الوسيط = ٤٠,٦

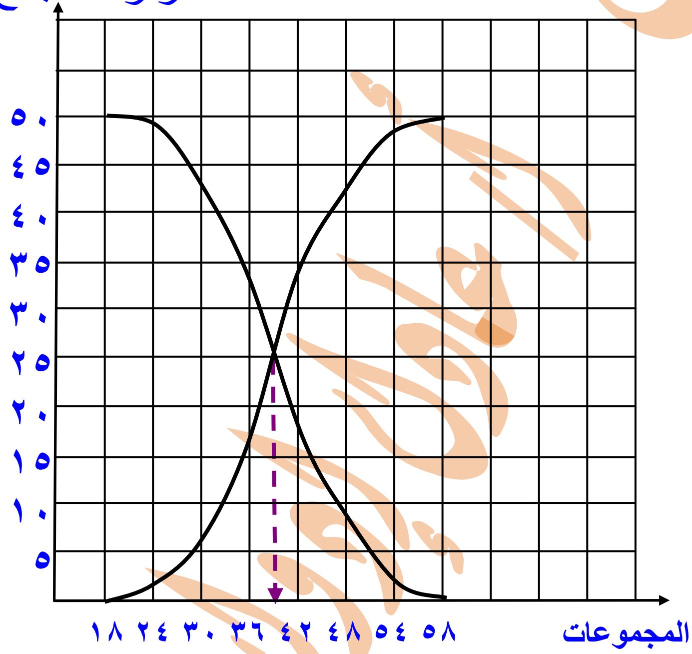
من المنحنى التكرارى المتجمع النازل

| الحدود السفلى للمجموعات | التكرار المتجمع النازل |
|---|---|
| ١٨ فأكثر | ٥٠ |
| ٢٤ فأكثر | ٤٨ |
| ٣٠ فأكثر | ٤٤ |
| ٣٦ فأكثر | ٣٤ |
| ٤٢ فأكثر | ١٦ |
| ٤٨ فأكثر | ٨ |
| ٥٤ فأكثر | ٢ |
| ٥٨ فأكثر | صفر |




ترتيب الوسيط = $\frac{٥٠}{٢}$ = ٢٥

من الرسم الوسيط = ٤٠,٦




<u>من المنحنيين معاً :</u>

من الرسم وملاحظة نقطة تقاطع المنحنيين

يكون الوسيط = ٤٠,٦

## تمـــارين

(١) التوزيع التكرارى الآتى يبين درجات ٥٠ طالباً فى أحدى الاختبارات

| المجموعات | ٢ ـــ | ٤ ـــ | ٦ ـــ | ٨ ـــ | ١٠ ـــ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٢ | ٢٠ | ١٢ | ٩ | ٧ | ٥٠ |

أوجد الوسيط لهذا التوزيع مستخدماً جدول التكرار المتجمع الصاعد:

(٢) فيما توزيع الأجور لبعض العاملين فى أحدى المصانع
أرسم منحنى التكرار المتجمع النازل لهذا التوزيع ثم اوجد الأجر الوسيط

| الأجور | ٣٠٠ ـــ | ٤٠٠ ـــ | ٥٠٠ـــ | ٦٠٠ ـــ | ٧٠٠ـــ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد العمال | ٨ | ١٢ | ١٨ | ٧ | ٥ | ٥٠ |

(٣) من الجدول التكرارى التالى ذى المجموعات المتساوية فى المدى أوجد

| المجموعات | ٥ ـــ | ١٥ ـــ | س ـــ | ٣٥ ـــ | ٤٥ـــ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ١٨ | ك | ٢٣ | ٣٠ | ١٢ | ١٠٠ |

أوجد قيمة س ، ك ثم أوجد الوسيط

(٤) من الجدول التكرارى التالى

| المجموعات | ١٦ ـــ | ٢٠ ـــ | ٢٤ ـــ | ٢٨ ـــ | ٣٢ ـــ | ٣٦ ـــ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ١ | ٧ | ١٢ | ٥ | ٣ | ٢ |

أرسم فى شكل واحد المنحنيين المتجمعين الصاعد والنازل ثم احسب الوسيط

(٥) من الجدول التكرارى التالى ، احسب الوسيط

| المجموعات | ٣٠ ـــ | ٦٥ ـــ | ٧٠ ـــ | ٧٥ ـــ | ٨٠ ـــ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ١ | ٥ | ١٥ | ٧ | ٢ | ٣٠ |

(٦) من الجدول التكرارى التالى ، احسب الوسيط

| المجموعات | ١٥ ـــ | ٢٠ ـــ | ٢٥ـــ | ٣٠ ـــ | ٣٥ـــ | ٤٠ ـــ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ١٠ | ١٥ | ٢٢ | ٢٥ | ٢٠ | ٨ |

# المنـــوال

**تعريف :**

المنوال هو القيمة الأكثر شيوعاً فى مجموعة المفردات " القيم "
أى القيمة التى تتكرر أكثر من غيرها من القيم

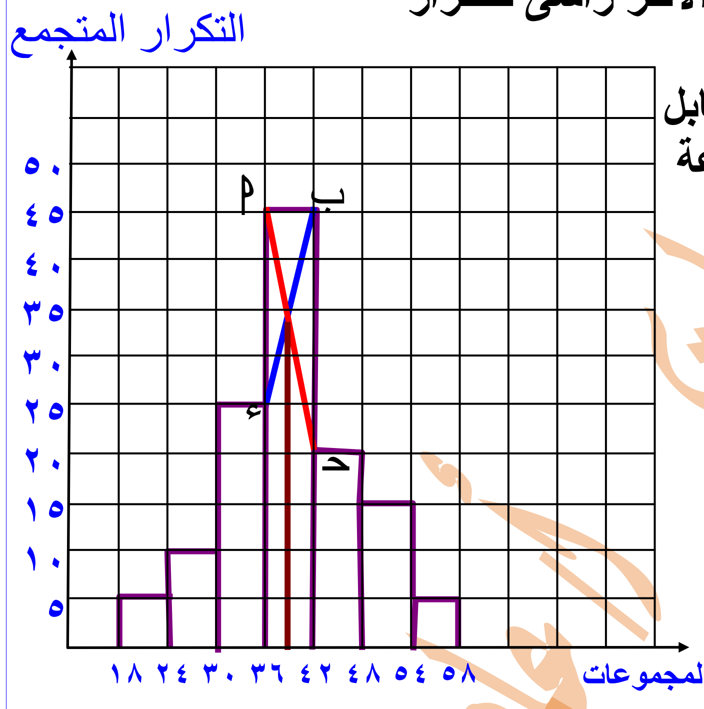
**لإيجاد المنوال لجدول تكرارى ذى مجموعات لاحظ المثال الآتى :**

**مثـــــال :** أوجد المنوال للجدول التكرارى الآتى :

| المجموعات | ١٨ ــ | ٢٤ ــ | ٣٠ ــ | ٣٦ ــ | ٤٢ ــ | ٤٨ ــ | ٥٤ ــ | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٢ | ٤ | ١٠ | ١٨ | ٨ | ٦ | ٢ | ٥٠ |

**نرسم المدرج التكرارى كالآتى :**

نرسم محورين أحدهما أفقى للمجموعات والآخر رأسى للتكرار
نستخدم مقياس رسم مناسب للمحورين
نرسم مستطيلات متلاصقة كما بالشكل المقابل
بحيث يكون عرض كل منها مدى المجموعة
طول كل منها تكرار المجموعات بالترتيب




**إيجاد المنوال :**

المنوال يتحدد من المجموعة المنوالية وهى الأكثر تكراراً
نحدد نقطة تقاطع $\overline{\text{م حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$
و نسقط منها عموداً على المحور الأفقى
يحدد القيمة المنوالية المنوال = ٤١

# تمـــارين

أوجد المنوال لكل من الجداول التكرارية الآتية :

(١)

| المجموعات | ٣ – | ٤ – | ٥ – | ٦ – | ٧ – | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٣ | ٢٠ | ١٢ | ٩ | ٧ | ٥٠ |

(٢)

| المجموعات | ١٠ – | ١١ – | ١٢ – | ١٣ – | ١٤ – | ١٥ – |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ١ | ٤ | ٨ | ١٣ | ٣ | ١ |

(٣)

| المجموعات | ٥ – | ١٥ – | ٢٥ – | ٣٥ – | ٤٥ – | ٥٥ – |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ١٥ | ١٧ | ٢٣ | ٣٠ | ٢٢ | ٣ |

(٤)

| المجموعات | ٦٠ – | ٦٥ – | ٧٠ – | ٧٥ – | ٨٠ – | المجموع |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ١ | ٥ | ١٥ | ٧ | ٢ | ٣٠ |

(٥)

| المجموعات | ١٦ – | ٢٠ – | ٢٤ – | ٢٨ – | ٣٢ – | ٣٦ – |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ١ | ٧ | ١٢ | ٥ | ٣ | ٢ |

(٦) الجدول الآتى يبين التوزيع التكرارى ذا المجموعات متساوية المدى لدرجات ٤٠ طالباً فى أحد الاختبارات

| المجموعات | ٣٠ – | ٤٠ – | س – | ٦٠ – | ٧٠ – | ٨٠ – |
|---|---|---|---|---|---|---|
| التكرار | ٣ | ٤ | ١٢ | ٨ | ك | ٦ |

أوجد قيمة كل من س ، ك ثم أوجد الدرجة المنوالية